

Pontok pakolása konvex alakzatokba

Joós Antal

ELTE TTK Matematika Doktori Iskola

Elméleti matematika doktori program

A doktori iskola vezetője:

prof. Laczkovich Miklós

A programvezető:

prof. Szenthe János

A témavezető:

Böröczky Károly egyetemi tanár, a matematikai tudományok doktora

A kutatóhely neve:

ELTE TTK Geometriai Tanszék

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Hét pont pakolása egy síkbeli konvex testbe	5
2.1. Problémafelvetés	5
2.2. Az 1. és 2. Tétel bizonyítása, ha $Q = \text{conv}\{a_1, a_2, \dots, a_7\}$ egy hatszög	8
2.3. Az 1. és 2. Tétel bizonyítása, ha $Q = \text{conv}\{a_1, a_2, \dots, a_7\}$ nem egy hatszög	15
3. Egy páratlan Hadwiger-számú test	17
3.1. Problémafelvetés	17
3.2. A Tétel egy átfogalmazása	19
3.3. Egy konstrukció	19
3.4. Előkészületek	20
3.5. A Tétel bizonyítása	31
4. Pontok pakolása 3-dimenziós kockába	33
4.1. Problémafelvetés	33
4.2. Jelölések	34
4.3. A bizonyítás vázlata	35
4.4. Előkészületek	36
4.5. A Tétel bizonyítása	58
5. A 4-dimenziós egységkocka fedése gömbökkel	73
5.1. Problémafelvetés	73
5.2. A bizonyítás vázlata	73
5.3. Előkészületek	74

5.4. A Tétel bizonyítása	80
6. Pontok pakolása 5-dimanzíós kockába	81
6.1. Problémafelvetés	81
6.2. Jelölések	81
6.3. A bizonyítás vázlata	84
6.4. Előkészületek	84
6.5. A Tétel bizonyítása	91
7. Irodalom	95

1. Bevezetés

Olyan pontrendszerek keresése, amely pontrendszerek egy adott tartományon belül helyezkednek el, és a pontok páronkénti távolsága legalább egy adott érték, már régóta a matematikai kutatás tárgyát képezi. Ez a problémakör átfogalmazható egy adott tartományban elhelyezkedő gömbök sugarának a maximalizálására, ha a gömbök darabszáma rögzített, a gömbök egybevágóak és nem nyúlnak egymásba. Ezen eredmények sorát bővítem ebben a dolgozatban, és ennek a problémának a duális változatára adok egy eredményt, miszerint egy adott tartományt a lehető legkisebb, egybevágó gömbökkel fedünk le, ha a gömbök darabszáma rögzített.

A dolgozat második fejezetében a síkon egy tetszőleges C konvex alakzatban helyeznek el hét darab pontot, amelyek C -távolságát vizsgáljuk. A fejezetben közölt eredmény Lángi Zsolttal közös [26].

A harmadik fejezetben a 3-dimenziós euklideszi térben adok meg egy olyan centrál-szimmetrikus, konvex testet, amelynek a Harwiger-száma 15, azaz az olyan eltoltságainak a maximális száma 15, amelyek érintik az eredeti testet és az eltoltságok nem nyúlnak egymásba. Ezt az eredményt átfogalmazzuk pontok egy normált térben való pakolására [27].

A negyedik fejezetben a 3-dimenziós euklideszi térben megmutatom, hogy a legkisebb kocka éle $\sqrt{2}$, amelyben elfér 14 olyan pont, amelyek páronkénti távolsága legalább 1 [28].

A ötödik fejezetben a 4-dimenziós euklideszi térben megmutatom, hogy a 4-dimenziós egységkocka 8 darab 4-dimenziós, egybevágó gömbbel való lefedése esetén a gömbök minimális sugara $\sqrt{\frac{5}{12}}$ [29].

A hatodik fejezetben az 5-dimenziós euklideszi térben az 5-dimenziós egységkockában elhelyezhető olyan pontok darabszámára adok egy felső becslést, amely pontok távolsága legalább 1. Ez a felső becslés 42 [30].

Egy d -dimenziós konvex test alatt egy korlátos, zárt, nemüres belsejével rendelkező d -dimenziós halmazt értünk. Használjuk a megszokott int, card, min, bd, conv, diam, cl, $d(\cdot, \cdot)$ és $\text{Area}(p_1 p_2 \dots p_n)$ jelöléseket rendre egy halmaz belsejére, számosságára,

minimumára, határára, konvex burkára, átmérőjére, lezártjára, két halmaz euklideszi távolságára és a $p_1 p_2 \dots p_n$ (síkbeli) konvex poligon területére. A p és q pontok legyenek az d -dimenziós euklideszi tér (\mathbb{R}^d) különböző pontjai. Jelölje $[p, q]$, (p, q) , $(p, q]$, $[p, q)$, $|pq|$ (vagy $d(p, q)$) és \vec{pq} rendre a p, q pontok által meghatározott zárt, nyílt, balról nyílt jobbról zárt, balról zárt jobbról nyílt intervallumot, a p, q pontok távolságát és a p kezdőpontú q végpontú vektort. Továbbá, ha P egy egyszerű poligon az $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$, \dots , $[a_n, a_1]$ élekkel, akkor használjuk a $P = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ és int $P = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ jelöléseket. Jelölje $B^d(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : d(a, x) \leq r\}$ az a középpontú r sugarú d -dimenziós gömböt. A d -dimenziós euklideszi térben legyen rögzített egy d -dimenziós Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer, amelynek az origója o . Ekkor használjuk az $x(x_1, x_2, \dots, x_d)$ vagy (x_1, x_2, \dots, x_d) jelöléseket az x pont koordinátáira. Az x pontot és az \mathbf{x} vektort azonosítjuk. A $pqr\angle$ jelölje a p, q, r pontok által ebben a sorrendben meghatározott konvex szöget. Legyen $R_{a,b}$ az a kezdőpontú b pontot tartalmazó félegyenes ($a \neq b$). Legyen $L_{a,b}$ az a, b különböző pontokon átmenő egyenes. $(E, F)\angle$ jelölje az E, F félegyenesek által meghatározott konvex szöget. Jelölje $H(L, p)$ az L egyenes határolta p pontot tartalmazó zárt félsíkot. Ha A egy halmaz és $a_1 \in A, a_2 \in A, \dots, a_n \in A$, akkor ezt egyszerűen $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ szimbólummal jelöljük. Jelölje \mathcal{C} a síkbeli konvex testek halmazát, azaz, ha $C \in \mathcal{C}$, akkor $C \in \mathbb{R}^2$.

2. Hét pont pakolása egy síkbeli konvex testbe

2.1. Problémafelvetés

Legyen a p, q pontok $C \subset \mathbb{R}^d$ konvex testre vonatkoztatott *relatív távolsága* vagy *relatív hossza* vagy *C -távolsága* vagy *C -hossza* a $\frac{2d(p,q)}{d(p',q')}$, ahol p', q' a $[p, q]$ szakasszal párhuzamos maximális C testbeli húr. A p, q pontok C -távolságát jelölje $d_C(p, q)$. Ha a C test egyértelmű, akkor használni fogjuk a p, q pontok relatív távolságát, vagy relatív hosszát. Vegyük észre, hogy $D \subset C$ és $p, q \in \mathbb{R}^d$, akkor $d_C(p, q) \leq d_D(p, q)$. Jól ismert tény, hogy a $d_C(o, x)$ normával rendelkező normált tér egységsgömbje C középpontos szimmetrizáltja $\frac{1}{2}(C - C)$.

Legyen $C \in \mathcal{C}$ és $k \geq 2$, azaz $C \in \mathbb{R}^2$. Ekkor a kompaktsági tulajdonságokból következik, hogy létezik a maximális $f_k(C)$ érték, amelyre igaz, hogy a C test tartalmaz k darab pontot, amelyek páronkénti C -távolsága legalább $f_k(C)$. Legyen $f_k = \min_{C \in \mathcal{C}} \{f_k(C)\}$ és $F_k = \max_{C \in \mathcal{C}} \{f_k(C)\}$. A Blaschke-féle kiválasztási tétel szerint léteznek ezek az értékek.

Számos eredményt találhatunk az $f_k(C)$, f_k és F_k értékekről. Itt megemlítünk néhányat. Doliwka és Lassak [10] megmutatta, hogy egy síkbeli konvex test határának 5 pontja között mindig van kettő, amelyik relatív távolsága legfeljebb $\sqrt{5} - 1 \approx 1.236$ és a $\sqrt{5} - 1$ érték nem javítható. Böröczky és Lángi [3] megmutatta, hogy Doliwka és Lassak eredménye igaz tetszőleges 5 pontjára a konvex testnek, azaz $F_5 = \sqrt{5} - 1$. Ők azt is megmutatták, hogy $F_6 = 2 - \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 1.106$, és sejtették, hogy $F_7 = 1$. Lángi Zsolttal sikerült ezt a sejtést igazolnunk.

1. Tétel. *Legyen $C \in \mathcal{C}$ és legyenek a_1, \dots, a_7 a C testbeli pontok. Ekkor $d_C(a_i, a_j) \leq 1$ valamely $i \neq j$ esetén.*

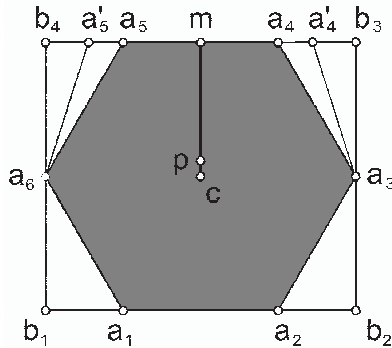
Egy $C \in \mathcal{C}$ legyen *optimális*, ha tartalmaz hét pontot, amely pontok páronkénti C -távolságainak minimuma pontosan 1. Ekkor azt mondjuk, hogy a pontok *kitöltik* a C testet. A probléma nyilván onnan ered, hogy melyek az optimális testek és melyek az ezeket kitöltő pontrendszerek. Figyeljük meg a következő három példát!

Első példa: Gołab [15] eredménye, hogy minden C síkbeli konvex testben létezik a C

testbe beírt affin szabályos H hatszög. A H hatszög csúcsai és a középpontja kitöltik a C testet, így C optimális.

Második példa: minden P paralelogrammában több olyan 7 pontból álló pontrendszer van, amelyek páronkénti P -távolsága legalább 1. Minden $C \subset P$ síkbeli konvex test, amely tartalmazza ezeket a pontokat, optimális.

Harmadik példa: legyen $H = [a_1, a_2, \dots, a_6]$ egy szabályos hatszög és $S = [b_1, b_2, b_3, b_4]$ a H köré írt téglalap, amelyre igaz $[a_1, a_2] \subset [b_1, b_2]$ és $a_1 \in [b_1, a_2]$. Legyen c a H középpontja és $m = (b_3 + b_4)/2$. Legyen $a'_4 \in (b_3, a_4)$ és $a'_5 \in (a_5, b_4)$ olyan, hogy $|a_4 a'_4| = |a_5 a'_5|$ és legyen $p \in (c, m)$, (1. ábra). Végül legyen $C = [a_1, a_2, a_3, a'_4, a'_5, a_6]$. Ha p elég közel van a c ponthoz, akkor a C csúcsainak és a p pontnak a páronkénti C -távolságai legalább 1.



1. ábra.

Eredményeinket az optimális testekről és kitöltő pontrendszerekről a következő tétel foglalja össze .

2. Tétel. Legyen $C \in \mathcal{C}$, $Q = \text{conv}\{a_1, a_2, \dots, a_7\} \subset C$ és $d_C(a_i, a_j) \geq 1$ minden $i \neq j$ esetén. Ekkor:

2.1. Ha C szigorúan konvex, akkor Q egy affin szabályos hatszög, amelynek a középpontja valamelyik a_i .

2.2. Ha $\text{card}(\text{bd } Q \cap \{a_1, a_2, \dots, a_7\}) \neq 6$, akkor létezik egy P paralelogramma, hogy $C \subset P$ és $d_P(a_i, a_j) \geq 1$ minden $i \neq j$ esetén.

A következő lemmát használjuk az 1. Tétel és a 2. Tétel bizonyításában.

2.1. Lemma. Legyen $C \in \mathcal{C}$ és $n \geq 6$, $D = [a_1, a_2, \dots, a_n] \subset C$ egy (esetleg degenerált) konvex n -szög és $T \subset D$ egy beírt maximális területű háromszög, amelynek az egyik oldala megegyezik a D egyik oldalával. Ekkor:

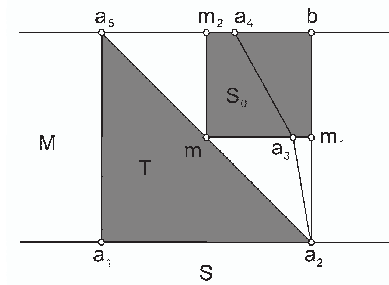
2.1.1. A D testnek van egy olyan oldala, amelynek a C -hossza legfeljebb 1.

2.1.2. Ha a D testnek minden oldalának a C -hossza legalább 1, akkor C nem szigorúan konvex és létezik egy P paralelogramma, amelyre $C \subset P$ és a D oldalának P -hossza legalább 1.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $T = [a_1, a_2, a_i]$ egy megfelelő i esetén. Vegyük észre, hogy $\text{cl}(D \setminus T)$ tartománynak van egy W komponense legalább négy csúcscsal. Tegyük fel, hogy $\{a_2, a_i\} \subset \text{bd } W$, azaz $i \geq 5$. A relatív távolság és a területek aránya nem változik egy tetszőleges (nem elfajuló) affin transzformáció esetén, így feltehetjük, hogy T egy egyenlő oldalú derékszögű háromszög és a derékszög az a_1 csúcsnál van. Legyen b olyan pont, hogy $S = [a_1, a_2, b, a_i]$ egy négyzet. Mivel T a maximális háromszög a D testben, így $a_j \in [a_2, b, a_i]$ minden $j = 3, \dots, i-1$ esetén.

Legyen m_1, m_2 és m rendre az $[a_2, b]$, $[b, a_i]$ és $[a_i, a_2]$ felezőpontja. Ha $a_3 \in [a_2, m_1, m] \setminus [m, m_1]$, akkor $d_C(a_2, a_3) \leq d_T(a_2, a_3) < 1$ és készen vagyunk. Ha $a_{i-1} \in [a_i, m, m_2] \setminus [m, m_2]$, akkor $d_C(a_{i-1}, a_i) < 1$. Tehát azt az esetet kell megvizsgáljunk, ha $a_j \in S_0 = [m, m_2, b, m_1]$ minden $3 \leq j \leq i-1$ esetén. Ekkor $d_C(a_j, a_{j+1}) \leq d_T(a_j, a_{j+1}) \leq 1$ valamely $3 \leq j \leq i-1$ esetén. Ezzel beláttuk a 2.1.1. állítást. Sőt, ha valamely $3 \leq j \leq i-2$ esetén az a_j és a_{j+1} pontok nem az S_0 párhuzamos oldalain helyezkednek el, akkor $d_C(a_j, a_{j+1}) \leq d_T(a_j, a_{j+1}) < 1$. Vizsgáljuk most az ellenkező esetet! Ekkor $i = 5$ vagy $i = 6$ és az utóbbi esetben $a_3 = m_1$, $a_4 = b$ és $a_5 = m_2$, amiből következik, hogy $S \subset C$. Ha $S \neq C$, akkor a pontok között van kettő, amely C -távolsága kevesebb, mint 1. Ha $S = C$, akkor a pontok páronkénti S -távolsága legalább 1.

Tegyük fel, hogy $i = 5$ és - mondjuk - $a_3 \in [m_1, m]$ és $a_4 \in [m_2, b]$. Jelölje M a zárt sávot, amely tartalmazza az S négyzetet és az a_1, a_2 pontokon átmenő egyenes és



2. ábra.

a b, a_5 pontokon átmenő egyenes határolja (2. ábra). $d_C(a_2, a_3) \geq 1$ egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $C \subset M$. Legyenek az u, v pontok a C -beli, $\overrightarrow{a_3 a_4}$ vektorral párhuzamos, maximális húr végpontja, és legyen N a zárt sáv, amelyet a C test u, v pontokon átmenő támaszegyenesei határolnak. Ekkor $C \subset P = M \cap N$ és a D oldalainak a P -hossza legalább 1. Vegyük észre azt is, hogy a C nem szigorúan konvex. \square

2.2. Az 1. és 2. Tétel bizonyítása, ha $Q = \text{conv}\{a_1, a_2, \dots, a_7\}$ egy hatszög

Tegyük fel, hogy $Q = [a_1, a_2, \dots, a_6]$ és $a_7 \in \text{int } Q$. Legyen $a_i = q_i$, ha $i = 1, 2, \dots, 6$, $q_7 = q_1$ és $q_0 = q_6$.

Használjuk a következő jelöléseket és kifejezéseket. Bármely i, j, k, l esetén, ahol $1 \leq i, j, k, l \leq 6$ és $\{i, j\} \neq \{k, l\}$, α_i jelölje a Q belső szögét a q_i csúcsban, q_{ij} jelölje a $[q_i, q_j]$ szakasz felezőpontját és $L_{ij,kl}$ jelölje a q_{ij} és q_{kl} pontokon átmenő egyenest. Használjuk a $q_i = q_{ii}$ és $L_{i,kl} = L_{ii,kl}$ és $L_{i,k} = L_{ii,kk}$ jelöléseket. Legyen $S_i = [q_i, q_{i+1}]$, ha $i = 1, 2, \dots, 6$ és M_i jelölje az S_i oldallal párhuzamos Q -beli maximális húr, amely a legkisebb euklideszi távolságra van az S_i oldaltól.

Ha $\alpha_{i-1} + \alpha_i + \alpha_{i+1}$ nagyobb, mint 2π , egyenlő 2π vagy kevesebb, mint 2π , ahol $i = 1, 2, \dots, 6$, akkor rendre azt mondjuk, hogy a_i *nagy*, *normál* vagy *kis csúcsa* a Q sokszögnek. Vegyük észre, hogy q_i és q_{i+3} mindkettő vagy normál csúcs, vagy az egyik

nagy és a másik kis csúcs.

Jegyezzük meg, hogy, ha $\alpha_i + \alpha_{i+1} \leq \pi$, akkor Q benne van egy olyan paralelogrammában, amelynek az egyik oldala S_i . Ebből következik, hogy a Q hatszögben van egy T_i háromszög a következő tulajdonságokkal: az S_i a T_i háromszögnek az egyik oldala, és T_i a maximális területű Q hatszögbe írt háromszög. Ekkor a Tétel állítása a 2.1. Lemmából következik, és így feltehetjük, hogy bármelyik egymást követő szöge a Q hatszögnek nagyobb, mint π . Ekkor három esetet különböztetünk meg:

1. *Eset.* A Q minden második csúcsa nagy.
2. *Eset.* A Q hatszögnek van három olyan egymás utáni csúcsa, hogy a második nagy, a másik kettő pedig nem kis csúcs.
3. *Eset.* A Q hatszögnek van három olyan egymás utáni csúcsa, hogy a második normál, a másik kettő pedig nem kis csúcs.

Lássuk az esetek bizonyítását!

1. *Eset.* A Q minden második csúcsa nagy.

Legyenek a q_1, q_3, q_5 nagy csúcsok és $b_i = q_1 + q_3 + q_5 - 2q_i$, ha $i = 1, 3, 5$ (3. ábra). Ekkor $Q \subset [b_1, b_3, b_5]$ és minden Q -beli maximális húr illeszkedik a q_1, q_3 vagy q_5 pontra. Jelölje Q_i a $\text{int } Q$ homotetikus képét, ahol a homotécia aránya $1/2$ és a középpontja q_i . Legyen $P_i = [q_i, q_{(i-1)i}, q_{(i-1)(i+1)}, q_{(i+1)i}]$, ha $i = 2, 4, 6$, $T_2 = [q_{13}, q_{14}, q_{36}]$, $T_4 = [q_{35}, q_{36}, q_{25}]$, $T_6 = [q_{15}, q_{25}, q_{14}]$ és $T = (q_{14}, q_{25}, q_{36})$.

Tegyük fel, hogy $d(q_i, q_{i+1}) \geq 1$ minden i esetén. Ekkor azt kell megmutatni, hogy minden $p \in \text{int } Q$ pontra

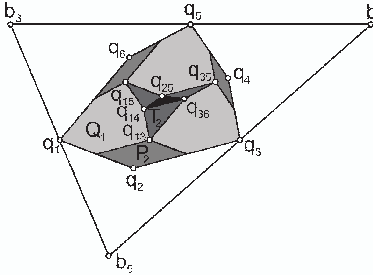
$$(*)_i \quad d_Q(p, q_i) < 1$$

valamely i esetén. Legyen $p \in \text{int } Q$. A p pont helyzetét vizsgáljuk különböző poligonokban. A szimmetriára való tekintettel feltesszük $p \in Q_1 \cup P_2 \cup T_2 \cup T$. Négy esetet különböztetünk meg:

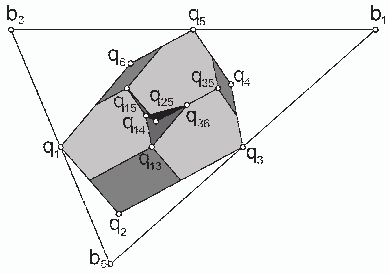
- (1) $(*)_1$, ha $p \in Q_1$.
- (2) $(*)_2$, ha $p \in P_2$.
- (3) $(*)_2$ vagy $(*)_4$ vagy $(*)_6$, ha $p \in T_2$.
- (4) $(*)_2$ vagy $(*)_4$ vagy $(*)_6$, ha $p \in T$.

Az (1) és (2) állításokat könnyű belátni és a (3) állítást is, ha $d_Q(q_2, q_{14}) < 1$ és

$d_Q(q_2, q_{36}) < 1$. Azt mutatjuk meg, hogy (3) igaz, ha $d_Q(q_2, q_{14}) \geq 1$ és $d_Q(q_2, q_{36}) \geq 1$ (ha $d_Q(q_2, q_{14})$ és $d_Q(q_2, q_{36})$ közül pontosan az egyik legalább 1, akkor a bizonyítás hasonló).



3. ábra.



4. ábra.

Legyen $\{s_1\} = L_{35,25} \cap [q_{13}, q_{15}]$ és $\{s_2\} = L_{15,25} \cap [q_{13}, q_{35}]$. A $d_Q(q_1, q_2) \geq 1$ és $d_Q(q_2, q_3) \geq 1$ egyenlőtlenségből következik, hogy q_2 a $q_{13}, (q_1 + b_5)/2, b_5$ és $(q_3 + b_5)/2$ csúcsú paralelogrammában van. Így a $[q_{13}, q_{35}, q_{15}]$ halmaz $[q_{13}, s_1, q_{25}, s_2] \setminus ([s_1, q_{25}] \cup [q_{25}, s_2])$ pontjainak a q_2 ponttól való Q -távolsága kisebb, mint 1. Hasonló állítás igaz a q_4 és q_6 pontokra. Legyen $\{w_1\} = L_{35,36} \cap [q_{13}, q_{14}]$, $\{w_2\} = L_{15,14} \cap [q_{13}, q_{36}]$ és $\{w\} = [q_{14}, w_2] \cap [q_{36}, w_1]$. Mivel $d_Q(q_2, q_{14}) \geq 1$ és $d_Q(q_2, q_{36}) \geq 1$, így a w_1, w_2 és w pontok léteznek. Jegyezzük meg, ha $p \in [q_{13}, w_2, w, w_1]$, $p \in [q_{14}, w_2, q_{36}] \setminus [w_2, q_{14}]$ és $p \in [q_{14}, w_1, q_{36}] \setminus [w_1, q_{36}]$ akkor rendre $(*)_2, (*)_4$ és $(*)_6$.

Most belátjuk a (4) állítást. Ha $T \cap (T_2 \cup T_4 \cup T_6) \neq \emptyset$, akkor $T \subset T_2 \cup T_4 \cup T_6$ és a tétel a (3) állításból következik, és így feltesszük, hogy $T \cap (T_2 \cup T_4 \cup T_6) = \emptyset$ (3. és 4. ábra). Ha $L_{15,25} \cap T = L_{35,25} \cap T = \emptyset$, akkor $(*)_2$. Ha $L_{15,25} \cap T \neq \emptyset \neq L_{35,25} \cap T$, akkor $L_{13,14} \cap T = L_{15,14} \cap T = \emptyset$, így $(*)_4$ teljesül. Végül megmutatjuk, hogy csak ez a két lehetőség van.

Tegyük fel, hogy $L_{15,25} \cap T \neq \emptyset$ és $L_{35,25} \cap T = \emptyset$. Legyen $v = \frac{1}{2}(\overrightarrow{q_1 q_6} + \overrightarrow{q_3 q_2} + \overrightarrow{q_5 q_4})$. Mivel $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$, ha $i = 1, 2, \dots, 6$, így a Q hatszögnek van egy u csúcspontja, amire igaz, hogy az u végpontú v vektorral párhuzamos V félegenes metszi az int Q halmazt.

Tegyük fel, hogy u egy nagy csúcs és $u = q_1$. Vegyük észre, hogy $\overrightarrow{q_{53}q_{52}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{q_3q_2} = v - \frac{1}{2}(\overrightarrow{q_1q_6} + \overrightarrow{q_5q_4}) = v - \overrightarrow{q_{15}q_{46}}$. Legyen $n = q_{15} + v + \overrightarrow{q_{52}q_{36}}$. Ekkor $\overrightarrow{q_{46}n} = \overrightarrow{q_{35}q_{36}} = \overrightarrow{q_5q_{56}}$, amiből következik, hogy $\overrightarrow{q_{45}n} = \overrightarrow{q_5q_6}$. Ha $i = 1, 2, \dots, 6$, akkor jelölje H_i az $L_{i5, (i+1)5}$ egyenes határolta, Q_5 pontot tartalmazó nyílt félsíkot. Ekkor $\overrightarrow{q_{45}n} = \overrightarrow{q_5q_6}$, $n \in H_3 \cap H_4 \cap H_5$. A $V \cap \text{int } Q$ esetén $q_{15} + v \in H_6 \cap H_1$. Az $L_{15,25} \cap T \neq \emptyset$ esetén kapjuk, hogy $q_{36} \in H_6 \cap H_1$. Ebből $n \in H_6 \cap H_1$. Legyen $D = \text{cl}(H_3 \cap H_4 \cap H_5 \cap H_6 \cap H_1)$. Ekkor $n \in D$ és $d_D(q_5, q_6) < 1$. Mivel a Q és a D $\overrightarrow{q_5q_6}$ irányú maximális húrja megegyezik, ezért $d_Q(q_5, q_6) < 1$.

Ha u kis csúcs, akkor hasonló okoskodással kapjuk az ellentmondást.

2. *Eset.* A Q hatszögnek van három olyan egymás utáni csúcsa, hogy a második nagy, a másik kettő pedig nem kis csúcs.

Legyen q_2 nagy és q_1, q_3 nem kis csúcs. Megmutatjuk, hogy $d_C(a_i, a_j) \leq 1$, és ha C szigorúan konvex, akkor $d_C(a_i, a_j) < 1$ valamely $i \neq j$ esetén.

Emlékeztetőül $S_i = [q_i, q_{i+1}]$ és M_i a Q -beli maximális, S_i oldallal párhuzamos, S_i oldalhoz legközelebb levő (euklideszi távolságra) húr. Megjegyezzük még, hogy Q minden egymást követő szögének összege nagyobb, mint π , minden Q -beli maximális húr metszi az S_j és S_{j+3} oldalakat, valamely $j \in \{1, 2, 3\}$ esetén. Ha M_i metszi az S_j és S_{j+3} oldalakat, akkor azt mondjuk, hogy M_i egy j -típusú maximális húr. Vegyük észre, hogy M_j nem lehet j -típusú és M_6 nem lehet 3-típusú. Ekkor M_1 lehet 2- vagy 3-típusú, M_2 lehet 1- vagy 3-típusú, M_3 lehet 1- vagy 2-típusú, M_6 lehet 1- vagy 2-típusú. Ha M_6 és M_3 rendre 1-típusú és 2-típusú, akkor kapjuk, hogy q_2 nem nagy csúcs, ellentmondás. Így 12 lehetőség adódik az M_1, M_2, M_3 és M_6 típusaira. Legyen $\{d_1\} = L_{5,6} \cap L_{1,2}$, $\{d_2\} = L_{6,1} \cap L_{2,3}$, $\{d_3\} = L_{1,2} \cap L_{3,4}$ és $\{d_4\} = L_{2,3} \cap L_{4,5}$.

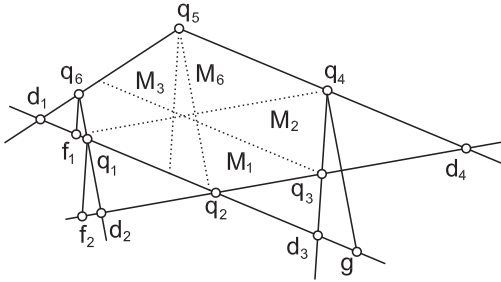
i) M_3 és M_6 1-típusú, M_1 2-típusú és M_2 3-típusú.

Ha $|q_1q_2| < |q_1q_6|$, akkor az M_1 típusából következik, hogy $d_Q(q_1, q_2) < 1$. Hasonlóan, $|q_2q_3| < |q_1q_2|$ egyenlőtlenségből következik, hogy $d_Q(q_2, q_3) < 1$, és $|q_3q_4| < |q_2q_3|$ egyenlőtlenségből következik, hogy $d_Q(q_3, q_4) < 1$. Tegyük fel, hogy $|q_1q_2| \geq |q_1q_6|$, $|q_2q_3| \geq |q_1q_2|$ és $|q_3q_4| \geq |q_2q_3|$. Legyen f_1 pont az $L_{1,2}$ egyenes és q_6 ponton átmenő, $L_{3,4}$ egyenessel párhuzamos egyenes metszéspontja, f_2 pont az $L_{2,3}$ egyenes és q_1 ponton átmenő, $L_{3,4}$ egyenessel párhuzamos egyenes metszéspontja, és g pont az $L_{1,2}$ egyenes és q_4 ponton átmenő, $L_{1,6}$ egyenessel párhuzamos egyenes metszéspontja

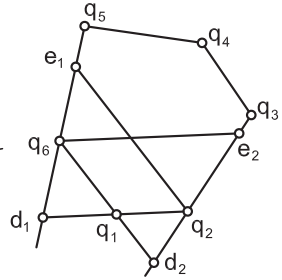
(5. ábra).

Mivel q_3 nem kis csúcs és $|q_3d_4| \geq |q_2q_3|$, így $|q_3q_4| \geq |q_3d_3|$. A $|q_2d_3| \geq |q_1q_2|$ egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $|q_3d_3| \geq |q_1f_2|$. Mivel $|q_1d_2| \geq |q_1q_6|$ és Q nemelfajuló, így $|q_1f_2| > |q_6f_1|$, valamint $2|q_6f_1| < |q_4d_3|$. Mivel $2|q_6q_1| < |q_4g|$ és M_6 1-típusú kapjuk, hogy $d_Q(q_1, q_6) < 1$.

Ha M_3 és M_6 2-típusú, M_1 3-típusú és M_2 1-típusú, akkor hasonló okoskodással kapjuk, hogy $d_Q(q_{i-1}, q_i) < 1$ valamely $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén.



5. ábra.



6. ábra.

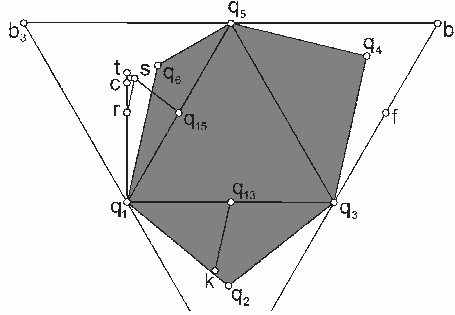
ii) M_6 és M_1 2-típusú.

Vegyük észre, hogy az M_2 és M_3 típusait tetszőlegesen választhatjuk ezért ez négy eset a típusokra nézve. Legyen e_1 pont az S_5 oldal és a q_2 ponton átmenő, S_6 oldallal párhuzamos egyenes metszéspontja, és legyen e_2 pont az S_2 oldal és a q_6 ponton átmenő, S_1 oldallal párhuzamos egyenes metszéspontja (6. ábra). Mivel M_6 és M_1 2-típusú, ezért e_1 és e_2 létezik. Vegyük észre, hogy $|d_1q_1| \leq |q_1q_2|$ vagy $|d_2q_1| \leq |q_1q_6|$, ahol d_1, d_2 ugyanaz, mint az előző esetben. Ha $|d_1q_1| \leq |q_1q_2|$, akkor $2|q_1q_6| \leq |q_2e_1|$ és így $d_C(q_1, q_6) \leq d_Q(q_1, q_6) \leq 1$. Hasonlóan a $|d_2q_1| \leq |q_1q_6|$ egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $d_C(q_1, q_2) \leq 1$. Egy részletes vizsgálatból kapjuk, hogy ha C szigorúan konvex és $d_C(q_i, q_j) \geq 1$ minden $i \neq j$ esetén, akkor Q affin szabályos hatszög. Jegyezzük meg, hogy ebben az esetben Q minden csúcsa normál csúcs ($\alpha_{i-1} + \alpha_i + \alpha_{i+1} = 2\pi$, ha $i = 1, 2, \dots, 6$), de mi feltettük, hogy a Q hatszögnek van egy nagy csúcsa, ellentmondás. Ha M_1 és M_2 3-típusú (az M_3 és M_6 típusait háromféleképpen választhatjuk meg),

vagy M_2 és M_3 1-típusú (az M_2 és M_3 típusait tetszőlegesen választhatjuk ezért ez négy eset a típusokra nézve), akkor hasonló okoskodással kapjuk a Tétel állításának bizonyítását. Az ii) esetben azt az esetet, amikor M_1, M_2, M_3, M_6 típusa rendre 2, 1, 1, 2 kétszer tárgyaltuk, így minden lehetséges esetet megvizsgáltunk az M_1, M_2, M_3 és M_6 típusaira nézve.

3. *Eset.* A Q hatszögnek van három olyan egymás utáni csúcsa, hogy a második normál a másik kettő pedig nem kis csúcs.

Legyen q_2 normál és q_1, q_3 nem kis csúcs. Mivel $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$, így $L_{6,1}$ és $L_{3,4}$ párhuzamos. Mivel a relatív hossz affin invariáns ezért feltehetjük, hogy a $[q_1, q_3, q_5]$ szabályos háromszög és $q_6 q_1 q_3 \angle \leq 90^\circ$. Legyen $b_i = a_1 + a_3 + a_5 - 2a_i$, ha $i = 1, 3, 5$. Mivel Q konvex valamint q_1 és q_3 nem kis csúcs, ezért $\{q_2, q_4, q_6\} \subset [b_1, b_3, b_5]$. Legyen $f = (q_3 + b_1)/2$ és legyen L a q_{13} pontot tartalmazó, $L_{1,6}$ egyenessel párhuzamos egyenes. Két esetet különböztetünk meg:



7. ábra.

3.1. *Eset.* $q_2 \notin L$.

3.2. *Eset.* $q_2 \in L$.

Lássuk az esetek bizonyítását!

3.1. *Eset.* $q_2 \notin L$.

Legyen $d = (q_3 + b_5)/2$. Megmutatjuk, hogy ha $d_Q(q_i, q_{i+1}) \geq 1$ minden i esetén, akkor $q_2 \in [q_1, b_5, d] \setminus [q_1, d]$, $q_4 \in [q_5, f, b_1]$ és $q_6 \in [q_{15}, q_5, b_3]$. Ebből következik, hogy $\frac{\pi}{6} <$

$q_3q_1q_2\angle$, $\frac{\pi}{6} \leq q_3q_5q_4\angle$, tehát q_3 kis csúcs, ellentmondás. Lássuk az állítás igazolását! Ha $|q_1q_6| \leq |q_3q_4|$, akkor $q_2 \notin [q_{13}, f^1, m_1]$, ahol $[q_{13}, f^1, m_1]$ a $[q_1, q_5, q_6]$ háromszög $-\frac{1}{2}$ arányú homotetikus képe, és $q_2 \notin [q_{13}, d, m_2]$, ahol $[q_{13}, d, m_2]$ a $[q_3, q_5, q_4]$ háromszög $-\frac{1}{2}$ arányú homotetikus képe. Ekkor tekintsük a $k(\in Q) = q_{13} + \frac{1}{2}\overrightarrow{q_6q_1}$; $r = q_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{q_5q_{13}}$; $s = r + \frac{1}{2}\overrightarrow{q_{13}k}$; $c = (q_1 + q_5 + b_3)/3$ és t a $[q_{15}, s]$ szakaszt tartalmazó egyenes és a $[q_1, c]$ szakaszt tartalmazó egyenes metszéspontját. Ekkor $q_6 \notin [q_{15}, f^3, m_3]$, ahol $[q_{15}, f^3, m_3]$ a $[q_1, q_2, q_3]$ háromszög $-\frac{1}{2}$ arányú homotetikus képe. Ekkor az okoskodás könnyen megkapható a 7. ábra segítségével.

Hasonlóan okoskodunk, ha $|q_1q_6| > |q_3q_4|$.

3.2. Eset. $q_2 \in L$.

Vegyük észre, hogy $M_1 \cap [q_2, q_3] \neq \emptyset$ és $M_1 \cap ((q_1, q_6) \cup S_5) \neq \emptyset$. Ha $M_1 \cap (q_1, q_6) \neq \emptyset$, akkor $d_C(q_1, q_2) \leq d_Q(q_1, q_2) = 1$. Sőt, ha $d_C(q_1, q_2) = 1$, akkor M_1 maximális C -ben is, amiből következik, hogy C nem szigorúan konvex. Hasonlóan, ha $M_2 \cap (q_4, q_5) \neq \emptyset$, akkor $d_C(q_2, q_3) \leq 1$, és $d_C(q_2, q_3) < 1$ vagy C nem szigorúan konvex.

Tegyük fel, hogy $M_1 \cap S_5 \neq \emptyset \neq M_2 \cap S_3$. Legyen w az $L_{1,6}$ egyenes és az M_1 szakaszt tartalmazó egyenes metszéspontja. Vegyük észre, hogy $[q_1, q_3, w]$ a $[q_1, q_2, q_{13}]$ homotetikus képe, ahol a homotácia aránya -2 és $2|q_{13}q_2| \geq |q_1q_6|$. Hasonlóan kapjuk, hogy $2|q_{13}q_2| \geq |q_3q_4|$. Mint korábban ebből és $d_Q(q_1, q_6) \geq 1$ egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $q_6 \in [q_{15}, q_5, b_3]$, $q_4 \in [q_5, f, b_1]$ és $\frac{\pi}{6} \leq q_2q_1q_3\angle$. Mivel q_1 nem kis csúcs, ezért $q_2q_1q_3\angle = \frac{\pi}{6}$, $q_4 \in [q_5, f]$, $q_6 \in [b_3, q_{15}]$ és $M_1 = [q_3, q_6]$. Legyen $\{x\} = L_{1,3} \cap L_{4,5}$. Jegyezzük meg, hogy $[q_3, q_4, x]$ a $[q_1, q_2, q_{13}]$ homotetikus képe, ahol a homotácia aránya -2 , $|q_3q_4| = 2|q_2q_{13}|$ és $|q_1q_6| = 2|q_2q_{13}|$. Vegyük észre, hogy $q_1 \in M_5$, $d_Q(q_5, q_6) = 1$ és $M_5 \cap S_4 \neq \emptyset$. Legyen $\{y\} = M_5 \cap S_4$. Mivel $d_C(q_5, q_6) \leq d_Q(q_5, q_6)$, ezért feltehetjük, hogy $d_C(q_5, q_6) = 1$. Ekkor $[q_1, y]$ a C maximális húrja. Ha $y \neq q_4$, akkor $y \in (q_4, q_5)$ és C nem szigorúan konvex. Ha $y = q_4$, akkor Q egy szabályos hatszög. Legyen c a Q középpontja. Ha $p \neq c$ egy pontja a $[q_i, q_{i+1}, c]$ tartománynak, akkor $d_Q(q_i, p) < 1$ vagy $d_Q(q_{i+1}, p) < 1$. Így a Q -nak egyetlen pontja van, amelynek a Q csúcsaitól mért Q -távolsága legalább 1. Ez a Q középpontja.

Az utolsó eset az $a_7 \in \text{bd}Q$. Ekkor a Q hatszöget egy degenerált hétszögnek tekintjük. Ekkor az 1. Tétel és a 2. Tétel bizonyítása a 2.3. fejezetben található.

Ezzel beláttuk a Tételek bizonyítását. \square

2.3. Az 1. és 2. Tétel bizonyítása, ha $Q = \text{conv}\{a_1, a_2, \dots, a_7\}$ nem egy hatszög

Feltesszük, hogy a Q sokszögben nincs olyan beírt háromszög, amelynek van olyan oldala, amely megegyezik Q valamelyik oldalával, különben az 1. Tétel és a 2. Tétel bizonyítása a 2.1. Lemmából következik. Két esetet különböztetünk meg:

1. *Eset.* $Q = [a_1, a_2, \dots, a_7]$.
2. *Eset.* Q egy háromszög vagy Q tartalmaz egy R négyszöget, amely esetén az a_i csúcsok megfelelő átbetűzésével elérhető, hogy $R = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ és $\text{card}(\text{int } R \cap \{a_5, a_6, a_7\}) \geq 2$.

Lássuk az esetek bizonyítását!

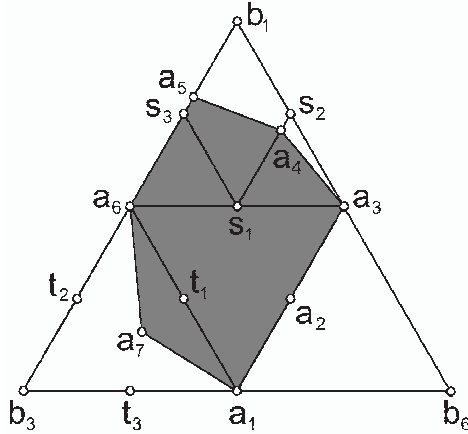
1. *Eset.* $Q = [a_1, a_2, \dots, a_7]$.

Legyen T a maximális területű, Q sokszögbe írt háromszög. Nyilván a T csúcsai egyben a Q csúcsai is. Tegyük fel, hogy $T = [a_1, a_3, a_6]$. Mivel a relatív távolság affin invariáns, ezért feltehetjük, hogy T egy szabályos háromszög. Legyen $b_i = a_1 + a_3 + a_6 - 2a_i$, ha $i = 1, 3, 6$. Mivel T maximális területű háromszög és Q konvex, ezért $a_2 \in [a_1, b_6, a_3]$, $\{a_4, a_5\} \subset [a_3, b_1, a_6]$ és $a_7 \in [a_6, b_3, a_1]$.

Legyen $s_1 = (a_3 + a_6)/2$, $s_2 = (a_3 + b_1)/2$, $s_3 = (b_1 + a_6)/2$, $t_1 = (a_6 + a_1)/2$, $t_2 = (a_6 + b_3)/2$ és $t_3 = (b_3 + a_1)/2$. Ha $d_Q(a_3, a_4) < 1$ vagy $d_Q(a_5, a_6) < 1$, akkor készen vagyunk, és így $\{a_4, a_5\} \subset [s_1, s_2, b_1, s_3]$. Jegyezzük meg, hogy a Q konvexitásából következik, hogy $d_Q(a_4, a_5) \leq 1$ és így az 1. Tételt bebizonyítottuk (8. ábra). A 2. Tétel bizonyításához feltesszük, hogy $d_Q(a_i, a_{i+1}) \geq d_C(a_i, a_{i+1}) \geq 1$ minden i esetén. Ekkor $d_C(a_4, a_5) = 1$ és a_4, a_5 az $[s_1, s_2, b_1, s_3]$ rombusz párhuzamos oldalain vannak. Feltesszük, hogy $a_4 \in [s_1, s_2]$ és $a_5 \in [b_1, s_3]$ (az ellenkező eset bizonyítása hasonló).

Legyen L_1 az a_1 és a_3 pontokon átmenő egyenes, és legyen L_2 a b_1 és b_3 pontokon átmenő egyenes. Legyen $H_1 = H(L_1, a_2)$ és $H_2 = H(L_2, a_6)$. Vegyük észre, hogy vannak $u \in (a_5, a_6)$ és $v \in (a_1, a_3)$ pontok, hogy $\vec{uv} \parallel \vec{a_3a_4}$. Mivel $d_C(a_3, a_4) \geq 1$, így $[u, v]$ a C maximális húrja, és így $C \subset H_1 \cap H_2$.

Mivel $C \subset H_1$, így $a_2 \in [a_1, a_3]$, ezért $a_2 = (a_1 + a_3)/2$ és $d_C(a_1, a_2) = d_C(a_2, a_3) = 1$. Mivel $d_C(a_1, a_3) = 2$, ezért létezik a C alakzatnak L_3 és L_4 párhuzamos támaszegyenesei az a_1 és a_3 pontokban. Legyen $a_1 \in L_3$ és $a_3 \in L_4$. Legyen P az L_1, L_2, L_3, L_4 határolta



8. ábra.

paralelogramma. Nyilván $C \subset P$.

Megmutatjuk, hogy Q minden oldalának P -hossza legalább 1. Azt kell megmutatnunk, hogy $d_P(a_7, a_1) \geq 1$ és $d_P(a_6, a_7) \geq 1$, mivel a többi egyenlőtlenség nyilván teljesül.

A $d_Q(a_6, a_7) \geq 1$ és $d_Q(a_7, a_1) \geq 1$ egyenlőtlenségekből kapjuk, hogy $a_7 \in [t_1, t_2, b_3, t_3]$. Ebből következik, hogy $d_P(a_7, a_1) \geq 1$. Legyen x a P csúcsa az $[a_6, b_3]$ szakaszon. Mivel $s_3 \in Q \subset P$ és $[a_1, a_3]$ a P egy oldala, ezért $x \in [a_6, t_2]$. Legyen $t = [a_1, t_2] \cap [t_1, t_3]$. Vegyük észre, hogy $a_7 \in [t_1, t, t_2]$. Ha $a_7 \notin [t_1, t] \cup [t, t_2]$, akkor $d_Q(a_6, a_7) < 1$, ellentmondás. Ha $a_7 \in [t_1, t] \cup [t, t_2]$, akkor $d_P(a_6, a_7) = 1$. Ezzel beláttuk az 1. Esetet.

2. Eset. Q egy háromszög vagy Q tartalmaz egy R négyszöget, amely esetén az a_i csúcsok megfelelő átbetűzésével elérhető, hogy $R = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ és $\text{card}(\text{int } R \cap \{a_5, a_6, a_7\}) \geq 2$.

A 2. Eset bizonyítása a 2.1. Lemma bizonyításához hasonló és [3] cikkben megtalálhatjuk, így elhagyjuk.

Ezzel beláttuk a Tételek bizonyítását. \square

3. Egy páratlan Hadwiger-számú test

3.1. Problémafelvetés

Konvex testek, azaz nemüres belsővel rendelkező, kompakt, konvex halmazok vizsgálatáról sokat olvashatunk a matematikai irodalomban. Ezeknek a testeknek egy jellemző mennyisége a test Hadwiger-száma, amit a következőképpen értelmezzünk: A B test $H(B)$ Hadwiger-száma a test olyan eltoltjainak maximális száma, amelyek érintik a B testet, és az eltoltak nem nyúlnak egymásba.

Számos eredménnyel találkozunk, pl.: Fejes Tóth [12], Fejes Tóth és Kuperberg [13], Talata [57], [58], [59], [60], és Zong [68], amelyek konvex testek Hadwiger-számát vizsgálják.

Grünbaum [21] belátta, hogy $H(B) = 6$, ha $B \subset \mathbb{R}^2$ konvex, nemparalelogramma test. Groemer [19] belátta, hogy $H(B) = 8$, ha $B \subset \mathbb{R}^2$ paralelogramma, így minden két dimenziós konvex test Hadwiger-száma páros. Grünbaumnak az volt a sejtése, hogy minden konvex test esetén a Hadwiger-szám páros tetszőleges d dimenzióban. Talata [61] talált egy olyan B három dimenziós testet, amelyre igaz, hogy $H(B) = 17$ (ezzel magasabb dimenzióban is megadott olyan testeket, amelyek Hadwiger-száma páratlan). Így az eredeti sejtés igazolása helyett (ami így nem igaz) a következő kérdést vetjük fel. Milyen páratlan Hadwiger-számok léteznek? Nyilván a $H(B) = H(B')$, ahol $B' = \frac{1}{2}(B + (-B))$. Hadwiger [24] és Grünbaum [21] belátta, hogy

$$H(B) \leq 3^d - 1.$$

Swinnerton-Dyer [56] belátta, hogy

$$d(d+1) \leq H(B).$$

Tehát három dimenzióban $12 \leq H(B) \leq 26$. Minden páros számra a $[12, 26]$ intervallumon könnyű olyan testet konstruálni három dimenzióban, amelynek a Hadwiger-száma az adott páros szám. Talata példájával látjuk, hogy $H(B) = 17$ lehetséges. Mi most megadunk egy olyan konvex testet, amelyre $H(B) = 15$.

Legyen K^+ egy (kör alapú) (egyenes) csonkakúp, aminek az alapkörének (C^0) sugara 1, magassága 1, valamint a fedőkörének (C^+) sugara $r_1 = 0,79822\dots$, ahol r_1 a

következő függvény $[0, 1]$ intervallumba eső egyetlen gyöke

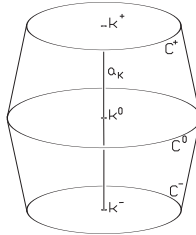
$$x \mapsto 6 \arcsin \frac{1}{2x} + 2 \arccos \frac{x}{1+x} - 2\pi$$

Legyen a P^* sík a (C^*) kör síkja, ahol $*$ $\in \{0, +\}$. Legyen K^-, C^-, P^- rendre a K^+ , C^+ , P^+ képe a P^0 síkra való tükrözésnél. Legyen továbbá $K = K^+ \cup K^-$. Ekkor

3. Tétel. *A K test Hadwiger-száma 15, azaz $H(K) = 15$.*

A bizonyítás során használjuk a következő jelöléseket.

Jelölje H^* a P^* ($*$ $\in \{-, +\}$) által határolt zárt félsíkot, amely nem tartalmazza a K testet és jelölje S az $\mathbb{R}^3 \setminus (H^+ \cup H^-)$ halmaz lezártját. Legyen a_K , k^+ , k^- és k^0 rendre a K test szimmetriatengelye, a C^+ , C^- és C^0 középpontja (9. ábra).



9. ábra.

A P^0 síkkal párhuzamos síkban elhelyezkedő $a \in \mathbb{R}^3$ középpontú $r > 0$ sugarú kört jelölje $C(a, r)$. Ha $a \subset \mathbb{R}^3$ és $b \subset \mathbb{R}^3$ olyan egyenesek, amely egyenesek affin burka egy sík, akkor az affin burkukat jelölje $[a, b]$. Ha K_i a K test egy \mathbf{v} vektorral való eltoltja, akkor jelölje rendre P_i^+ , C_i^+ , C_i^- , C_i^0 , a_{K_i} , k_i^+ , k_i^- és k_i^0 a P^+ , C^+ , C^- , C^0 , a_K , k^+ , k^- és k^0 \mathbf{v} vektorral való eltoltját. Jelölje továbbá k_i^P az a_{K_i} egyenes és a P^0 sík metszéspontját. A továbbiakban *család* alatt a K test olyan eltoltjainak halmazát értjük, amelyek nem nyúlnak egymásba és érintik a K testet.

3.2. A Tétel egy átfogalmazása

Legyen a p, q pontok $B \subset \mathbb{R}^d$ konvex testre vonatkoztatott relatív távolsága a $\frac{2d(p,q)}{d(p',q')}$, ahol p', q' a p, q szakasszal párhuzamos maximális B testbeli húr. Nyilván a p, q pontok B testre vonatkoztatott relatív távolsága megegyezik a p, q pontok $\frac{1}{2}(B + (-B))$ egységgömbre vonatkoztatott Minkowski-metrikában mért távolságával.

A B konvex test Hadwiger-száma $H(B)$ pontosan akkor, ha a B test határán maximálisan $H(B)$ darab olyan pont van, amelyek páronkénti relatív távolságainak minimuma legalább 1. Tehát a B konvex test Hadwiger-száma $H(B)$ pontosan akkor, ha a B test határán maximálisan $H(B)$ darab olyan pont van, amely pontok páronkénti, $\frac{1}{2}(B + (-B))$ egységgömbre vonatkoztatott Minkowski-metrikában mért távolságainak minimuma legalább 1.

4. Tétel. *A K határán az olyan pontok maximális száma 15, amely pontok K testre vonatkoztatott páronkénti relatív távolsága legalább 1.*

3.3. Egy konstrukció

Megadunk egy családot, amely elemeinek a száma 15. Ebből következik, hogy a K test Hadwiger-száma legalább 15.

Tekintsük a K test K_1, K_2 eltoltjait, amelyek érintik a K testet és $C_1^- = C_2^+$. Legyenek a $K_3 \subset H^+$ és $K_4 \subset H^+$ olyan eltoltak, amelyek érintik a K_1 testet és $d(k^0, k_3^P) = d(k^0, k_4^P) = 2r_1$. Legyenek a $K_5 \subset H^+, K_6 \subset H^+$, olyan eltoltak, amelyek rendre érintik a K_3, K_4 , testeket és $d(k^0, k_5^P) = 2r_1, d(k^0, k_6^P) = 2r_1$. Az r_1 választása garantálja, hogy K_5 és K_6 érinti egymást. Hasonló konstrukcióval kapjuk a K_7, K_8, K_9 és K_{10} eltoltakat a H^- féltérben. Végül legyenek K_i ($i \in \{11, 12, 13, 14, 15\}$) olyan eltoltak, amelyek érintik a K testet, mind az S sávban helyezkedik el, K_{11} érinti a K_1 eltoltat és K_i érinti a K_{i-1} eltoltat ($i = 12, 13, 14, 15$). Mivel $4 \cdot 60^\circ + 2 \cdot \arccos \frac{1}{1+r_1} < 360^\circ$ így ezek az eltoltak nem nyúlnak egymásba és K_{15} nem érinti K_1, K_2 egyikét sem. Ebből következik, hogy a K test Hadwiger-száma legalább 15.

Azt fogjuk belátni, hogy a K test Hadwiger-száma legfeljebb 15.

Mivel a K_{15} "lötyög", ezért az elrendezés nem egyértelmű, és a 4. Tételben a pontok nem egyértelműen helyezkednek el a K felületén.

3.4. Előkészületek

Ebben a fejezetben tárgyalunk néhány lemmát, amelyekre szükség lesz a Tétel bizonyításához a következő fejezetben.

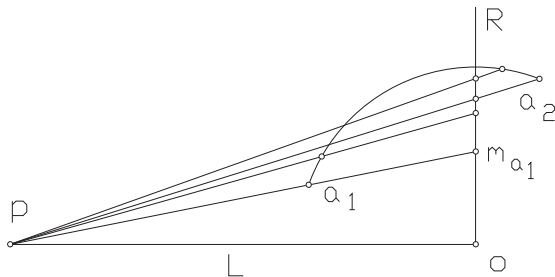
3.1. Lemma. *Legyen \mathbf{A} egy o középpontú, $r > 0$ sugarú, a_1, a_2 végpontú, zárt körív a síkon. Legyen $p \neq o$ olyan pont a síkon, hogy az \mathbf{A} körívnek és az $\{o, p\}$ pontokat tartalmazó egyenesnek nincs közös pontja. Ekkor az $opa\angle$ szög, ahol $a \in \mathbf{A}$, az a_1 vagy a_2 pontokban veszi fel a minimumát. Azaz*

$$\min_{a \in \mathbf{A}}(opa\angle) = \min(opa_1\angle, opa_2\angle)$$

és

$$opa\angle > \min(opa_1\angle, opa_2\angle) \text{ ha } a \in \mathbf{A} \setminus \{a_1, a_2\}.$$

Bizonyítás. Legyen L az o, p pontokat tartalmazó egyenes (10. ábra). Legyen H_L



10. ábra.

az L határolta \mathbf{A} körívet tartalmazó félsík. Legyen R az o kezdőpontú, L egyenesre

merőleges, H_L félsíkban elhelyezkedő félegyenes. Legyen E a P pontra illeszkedő, R félegyenessel párhuzamos egyenes. Tegyük fel, hogy $E \cap \mathbf{A} = \emptyset$ (az ellenkező eset hasonlóan bizonyítható). Legyen L_a a p, a pontokat tartalmazó egyenes, ahol $a \in \mathbf{A}$. Legyen m_a az L_a egyenes és az R félegyenes metszéspontja. A $d(o, m_a)$ távolság akkor a legkisebb ha $a = a_1$ vagy $a = a_2$. \square

3.1. Következmény. Legyen $\{K_1, K_2\}$ egy család és $d_1 \leq d(P^-, P_1^+) \leq d(P^-, P_2^+)$ valamilyen $d_1 \in [2, 4]$ értékre, valamint $\text{int } C(k_1^P, r_1) \cap \text{int } C(k_2^P, r_1) = \emptyset$ és $d_2 \leq d(k^0, k_i^P)$ minden $i \in \{1, 2\}$ és valamely $d_2 \in (2 - 2r_1, 2r_1] = (0.40 \dots, 1.59 \dots]$ esetén.

Ekkor

$$k_1^P k^0 k_2^P \angle \geq \min(\arccos \frac{4r_1^2 + x^2 - y^2}{4r_1 x}, \arccos \frac{d_2^2 + x^2 - y^2}{2d_2 x}),$$

ahol $x = (4 + d_1 r_1 - d_1 - 2r_1)$ és $y = (4r_1 + d_1 - d_1 r_1 - 2)$. Továbbá, ha az egyenlőség teljesül, akkor $d(P^-, P_1^+) = d_1$, $d(P^-, P_2^+) = 4$, $d(k^0, k_1^P) = x$, $d(k^0, k_2^P) \in \{d_2, 2r_1\}$ és K_1, K_2 érinti egymást.

Bizonyítás. Ha K_1, K_2 nem érinti egymást, akkor a K_1 eltolt a_K körüli K_2 eltolt felé való forgatása esetén (mígnem a K_1, K_2 testek érintik egymást) a $k_1^P k^0 k_2^P \angle$ szög csökken. Így feltehetjük, hogy K_1, K_2 érinti egymást. Három esetet különböztetünk meg:

1. Eset. $d_1 = 4$ és $d(k^0, k_1^P) \leq d(k^0, k_2^P)$.
2. Eset. $d_1 = 4$ és $d(k^0, k_1^P) > d(k^0, k_2^P)$.
3. Eset. $d_1 < 4$.

1. Eset. $d_1 = 4$ és $d(k^0, k_1^P) \leq d(k^0, k_2^P)$.

Legyen $z = d(k^0, k_1^P)$ rögzített szám. Forgassuk a K_2 testet a_{K_1} körül és a 3.1. Lemma miatt

$$k_1^P k^0 k_2^P \angle \geq \min(\arccos \frac{z^2 + d_2^2 - 4}{2zd_2}, \arccos \frac{z^2 + 4r_1^2 - 4}{4zr_1}) = \arccos \frac{z^2 + 4r_1^2 - 4}{4zr_1},$$

és ha az egyenlőség teljesül, akkor $d(k^0, k_2^P) = 2r_1$. Ezért legyen $d(k^0, k_2^P) = 2r_1$ rögzített érték. Most a K_1 testet forgatjuk a_{K_2} körül és a 3.1. Lemma miatt

$$k_1^P k^0 k_2^P \angle \geq \min(\arccos(1 - \frac{1}{2r_1^2}), \arccos \frac{d_2^2 + 4r_1^2 - 4}{4d_2 r_1}) =$$

$$= \min(\arccos \frac{4r_1^2 + x^2 - y^2}{4r_1x}, \arccos \frac{d_2^2 + x^2 - y^2}{2d_2x}) = \arccos(1 - \frac{1}{2r_1^2}),$$

és ha az egyenlőség teljesül, akkor $d(k^0, k_1^P) = 2r_1$, ami az állítás bizonyítása.

Jegyezzük meg, hogy $\arccos(1 - \frac{1}{2r_1^2}) = 2 \arcsin \frac{1}{2r_1}$.

2. Eset. $d_1 = 4$ és $d(k^0, k_1^P) > d(k^0, k_2^P)$.

A bizonyítás az 1. Eset bizonyításához hasonló.

3. Eset. $d_1 < 4$.

Ha K_1, K_2 érinti egymást, akkor a $k_1^P k^0 k_2^P \angle$ szög $d(P^-, P_1^+) = 4$ esetén nagyobb, mint $d(P^-, P_1^+) < 4$ esetén. Így feltehetjük, hogy $d(P^-, P_1^+) < 4$.

Megjegyezzük, hogy a K_1 (K_2) eltolt olyan mozgataása esetén, amikor a k^0 végpontú k_1^P (k_2^P) pontot tartalmazó félegyenes nem változik, akkor a $k_1^P k^0 k_2^P \angle$ szög sem változik. Tehát feltehetjük, hogy $d(P^-, P_1^+) = d_1$, $d(P^-, P_2^+) = 4$ és K, K_1 valamint K, K_2 érinti egymást. Ha K_1, K_2 nem érinti egymást, akkor ha K_1 forgatjuk az a_K körül K_2 felé, míg nem a K_1, K_2 testek érintik egymást, akkor a $k_1^P k^0 k_2^P \angle$ szög csökken. Így $d(k_1^P, k_2^P) = y$, $d(k^0, k_1^P) = x$ és $d_2 \leq d(k^0, k_2^P) \leq 2r_1$. A 3.1. Lemma miatt

$$k_1^P k^0 k_2^P \angle \geq \min(\arccos \frac{4r_1^2 + x^2 - y^2}{4r_1x}, \arccos \frac{d_2^2 + x^2 - y^2}{2d_2x}),$$

és ha az egyenlőség teljesül, akkor $d(k^0, k_2^P) \in \{d_2, 2r_1\}$, ami a Lemma bizonyítása.

□

3.2. Következmény. Legyen $\{K_1, K_2, K_3\}$ egy család $2 \leq d(P^-, P_1^+) \leq d(P^-, P_2^+) \leq d(P^-, P_3^+)$, és $\text{int } C(k_i^P, r_1) \cap \text{int } C(k_j^P, r_1) = \emptyset$ minden $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$ esetén, valamint $d_2 \leq d(k^0, k_i^P)$, minden $i \in \{1, 2, 3\}$ és valamilyen $d_2 \in (2 - 2r_1, 2r_1] = (0.40 \dots, 1.59 \dots)$ esetén és $k_1^P k^0 k_3^P \angle = k_1^P k^0 k_2^P \angle + k_2^P k^0 k_3^P \angle$. Ekkor

$$k_1^P k^0 k_3^P \angle \geq \min(\arccos \frac{1}{2r_1}, \arccos \frac{4 + d_2^2 - 4r_1^2}{4d_2}) + 60^\circ.$$

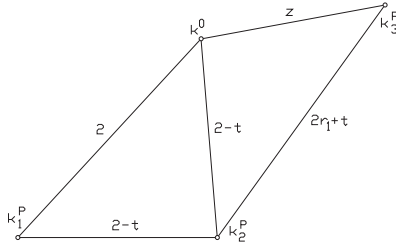
Továbbá, ha az egyenlőség teljesül, akkor $d(P^-, P_1^+) = 2$, $d(P^-, P_2^+) = 2$, $d(P^-, P_3^+) = 4$, $d(k^0, k_3^P) \in \{d_2, 2r_1\}$ valamint K_1, K_2 és K_2, K_3 érinti egymást.

Bizonyítás. Mint a 3.1. Következményben, itt is feltehetjük, hogy $d(P^-, P_1^+) = 2$, $d(P^-, P_3^+) = 4$, K_1, K_2 és K_2, K_3 érinti egymást.

Először feltesszük, hogy $d(P^-, P_2^+) < 4$. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(t) := k_1^P k_3^P \angle = \arccos \frac{1}{2-t} + \arccos \frac{(2-t)^2 + z^2 - (2r_1+t)^2}{2(2-t)z},$$

ahol $z = d(k^0, k_3^P)$ egy rögzített paraméter (ha $t = 0$, $t = 2 - 2r_1$, akkor rendre $d(P^-, P_2^+) = 2$, $d(P^-, P_2^+) = 4$) (11. ábra)



11. ábra.

Most negmutatjuk, hogy $f'(t) > 0$, ha $t \in [0, 2 - 2r_1]$.

A derivált

$$f'(t) = \frac{-\sqrt{-(-z^2+4+4r_1^2+8r_1)(4r_1^2+8r_1t-8r_1+4-z^2+4t^2-8t)}+(-z^2+4+4r_1^2+8r_1)\sqrt{3-4t+t^2}}{(2-t)\sqrt{3-4t+t^2}\sqrt{-(-z^2+4+4r_1^2+8r_1)(4r_1^2+8r_1t-8r_1+4-z^2+4t^2-8t)}}$$

nagyobb, mint 0 akkor és csakis akkor, ha

$$-\sqrt{-(-z^2+4+4r_1^2+8r_1)(4r_1^2+8r_1t-8r_1+4-z^2+4t^2-8t)}+(-z^2+4+4r_1^2+8r_1)\sqrt{3-4t+t^2} > 0,$$

azaz $f'(t) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $t < \frac{2(4r_1^2+4r_1+4-z^2)}{8-z^2+4r_1^2+8r_1}$ vagy $2 < t$. Könnyű belátni,

hogy $2 - 2r_1 < 1 \leq \frac{2(4r_1^2+4r_1+4-z^2)}{8-z^2+4r_1^2+8r_1}$, ha $z \in (d_2, 2r_1]$ tehát $f(0) = \min_{t \in [0, 2-2r_1]} (f(t))$.

Így feltesszük, hogy $t = 0$ és $\min_{z \in [d_2, 2r_1]} (f(0))$ értéket keressük. A 3.1. Következményt kell alkalmaznunk a $k_2^P k^0 k_3^P$ szögre, valamint a $k_1^P k^0 k_2^P \angle \geq 60^\circ$ egyenlőtlenséget (ha az egyenlőség teljesül, akkor $d(P^-, P_1^+) = d(P^-, P_2^+) = 2$), ahol $d(P^-, P_1^+) = d(P^-, P_2^+)$, ami az állítás bizonyítása.

Másodszor feltesszük, hogy $d(P^-, P_2^+) = 4$. A 3.1. Következmény miatt

$$k_1^P k^0 k_2^P \angle \geq \min(\arccos \frac{1}{2r_1}, \arccos \frac{4 + d_2^2 - 4r_1^2}{4d_2})$$

és

$$k_2^P k^0 k_3^P \angle \geq 2 \arcsin \frac{1}{2r_1} > 60^\circ,$$

így

$$k_1^P k^0 k_3^P \angle \geq \min(\arccos \frac{1}{2r_1}, \arccos \frac{4 + d_2^2 - 4r_1^2}{4d_2}) + 2 \arcsin \frac{1}{2r_1}.$$

Ebben az esetben az egyenlőség nem teljesülhet. Ezzel bebizonyítottuk a Következményt.

□

3.2. Lemma. Legyen $\mathfrak{F} = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ egy család és $K_i \subset H^+$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén. Ekkor $n \leq 4$.

Bizonyítás. Ha $d(k^0, k_i^P) \leq 2 - 2r_1$ valamely $i = 1, \dots, n$ esetén, akkor $\text{card } \mathfrak{F} \leq 2$.

Így feltesszük, hogy $d(k^0, k_i^P) > 2 - 2r_1$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén. Az egyszerűbb jelölés kedvéért legyen $k_{n+1}^P = k_1^P$. Mivel $k^0 \notin C(k_i^P, 2 - 2r_1)$, így nem létezik olyan $K_i \in \mathfrak{F}$, hogy $k_i^P = k^0$. Vetítsük a k_i^P pontot a k^0 pontból $\text{bd } C^0$ halmazra és legyen a kép $k_i'^P$. Feltehetjük, hogy a ciklikus sorrend a következő: $k_1'^P, k_2'^P, \dots, k_n'^P$.

A 3.1. Lemma miatt

$$k_i^P k^0 k_{i+1}^P \angle \geq 2 \arcsin \frac{1}{2r_1} = 77.56 \dots^\circ \text{ minden } i = 1, \dots, n \text{ esetén.}$$

Tehát $n < 5$, ami a Lemma bizonyítása.

Könnyű belátni, hogy $\text{card } \mathfrak{F} = 4$ lehetséges. □

A következő lemma megfogalmazása előtt bevezetünk egy új konstanst. Legyen $d = 0.74 \dots$ az

$$x \mapsto x^2 - 4x \cos\left(\frac{5\pi}{6} - 2 \arccos \frac{1}{2r_1}\right) - 4r_1^2 + 4$$

függvény egyetlen gyöke a $[0, 1]$ intervallumban.

3.3. Lemma. Legyen $\mathfrak{F} = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ egy család és $C_i^+ \subset H^+$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén. Legyen $\text{int } C(k_i^P, r_1) \cap \text{int } C(k_j^P, r_1) = \emptyset$ minden $\{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}$ esetén, ahol $i \neq j$. Legyen továbbá $k^0 \notin C(k_i^P, d)$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén. Ekkor $n \leq 6$.

Bizonyítás. A $k_1^P, k_2^P, \dots, k_n^P$ pontokat értelmezzük úgy, mint a 3.2. Lemmában és tegyük fel, hogy ez a ciklikus sorrendjük. Az egyszerűbb jelölés kedvéért legyen $K_{n+1} = K_1, K_0 = K_n, k_{n+1}^P = k_1^P$ és $k_0^P = k_n^P$.

Megjegyezzük, hogy a 3.1. Következmény miatt

$$k_i^P k_{i+1}^P \angle > \arccos \frac{4 + d^2 - 4r_1^2}{4d} = 47.56 \dots^\circ, \text{ ha } k^0 \in \text{int}(C(k_i^P, 1) \cup C(k_{i+1}^P, 1)),$$

és hasonlóan

$$k_i^P k_{i+1}^P \angle \geq \arccos \frac{1}{2r_1} = 51.21 \dots^\circ, \text{ ha } k^0 \notin \text{int}(C(k_i^P, 1) \cup C(k_{i+1}^P, 1)).$$

Mivel $1 < 2r_1$ így, ha $k^0 \in \text{int}(C(k_i^P, 1))$, akkor $d(P^-, P_i^+) = 4$. Mivel K_1, K_2, \dots, K_n testek nem egymásbanyúlóak, ezért legfeljebb egy $\text{int } K_i$ metszheti a a_K egyenest, azaz $k^0 \in \text{int}(C(k_i^P, 1))$ legfeljebb egy i értékre. Ebből és a $6 \cdot 51.21 \dots^\circ + 2 \cdot 47.56 \dots^\circ > 360^\circ$ egyenlőtlenségből következik, hogy $n < 8$.

Tegyük fel, hogy $n = 7$. Ekkor $d(P^-, K_{i-1}) \leq d(P^-, K_i) \leq d(P^-, K_{i+1})$ valamely i értékre.

Ha $k^0 \in \text{int}(C(k_{i+1}^P, 1))$, akkor

$$k_{i-1}^P k_{i+1}^P \angle > \arccos \frac{4 + d^2 - 4r_1^2}{4d} + 60^\circ$$

különben

$$k_{i-1}^P k_{i+1}^P \angle \geq \arccos \frac{1}{2r_1} + 60^\circ.$$

Így

$$\sum_{i=0}^6 k_i^P k_{i+1}^P \angle > 2 \arccos \frac{4 + d^2 - 4r_1^2}{4d} + 60^\circ + 4 \arccos \frac{1}{2r_1} = 360^\circ;$$

ami ellentmondás. \square

3.3. Következmény. Legyen $\mathfrak{F} = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ egy család és $C_i^+ \subset H^+$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén. Legyen $\text{int } C(k_i^P, r_1) \cap \text{int } C(k_j^P, r_1) = \emptyset$ minden $\{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}$ esetén, ahol $i \neq j$. Ekkor $n \leq 7$.

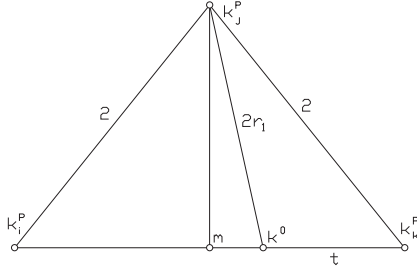
Bizonyítás. Mivel $2d < 2$ és ha $k^0 \in C(k_i^P, d)$, akkor $d(P^-, P_i^+) = 4$, így legfeljebb egy k_i^P lehet a $C(k^0, d)$ zárt körben. Ebből és a 3.3. Lemmából következik, hogy $n \leq 7$.

\square

Vegyük észre, hogy a 3.3. Lemmában a d konstans nem javítható és az $n = 6$ eset lehetséges.

3.4. Lemma. *Legyen $\mathfrak{F} = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ egy család és $K_i \subset H^+$ pontosan négy $K_i \in \mathfrak{F}$ esetén. Legyen továbbá $C_i^+ \subset \text{int } H^+$ minden $K_i \in \mathfrak{F}$ esetén. Ekkor $n \leq 5$.*

Bizonyítás. A $k_1^P, k_2^P, \dots, k_n^P$ pontokat értelmezzük úgy, mint a 3.2. Lemmában és tegyük fel, hogy ez a ciklikus sorrendjük. Az egyszerűbb jelölés kedvéért legyen $k_{n+1}^P = k_1^P$ és $t = \sqrt{4 - \frac{4r_1^2 - 1}{r_1^2}} - \sqrt{4r_1^2 - \frac{4r_1^2 - 1}{r_1^2}} = 0.909 \dots$. A lemma feltételeiből következik, hogy $d(k^0, k_i^P) \geq t$ minden i esetén (12. ábra).



12. ábra.

Mivel $d < t$, ezért a 3.3. Lemma feltételei teljesülnek, tehát $n \leq 6$.

Indirekt bizonyítunk. Feltesszük, hogy $n = 6$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

- (i) $(K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4) \subset H^+$; vagy
- (ii) $(K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_5) \subset H^+$; vagy
- (iii) $(K_1 \cup K_2 \cup K_4 \cup K_5) \subset H^+$.

Megmutatjuk, hogy minden esetben $X = \sum_{i=1}^6 k_i^P k^0 k_{i+1}^P \angle > 360^\circ$, ami ellentmondás.

(i) Ha $k^0 \notin \text{int}(C(k_i^P, 1))$ minden $i = 1, 2, 3, 4$ esetén, akkor $X \geq 6 \arcsin \frac{1}{2r_1} + 2 \arccos \frac{1}{2r_1} + 60^\circ > 360^\circ$.

Ellenkező esetben $k^0 \in \text{int}(C(k_i^P, 1))$ pontosan egy $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén.

Ha $k^0 \in \text{int}(C(k_1^P, 1))$ (a $k^0 \in \text{int}(C(k_4^P, 1))$ eset bizonyítása hasonló), akkor a 3.1. Következmény miatt

$$k_i^P k^0 k_{i+1}^P \angle \geq 2 \arcsin \frac{1}{2r_1} = 77.56 \dots^\circ, \text{ ha } i = 1, 2, 3.$$

Most becsljük $\sum_{i=4}^6 k_i^P k^0 k_{i+1}^P \angle$ értékét. Ha $d(P^-, P_5^+) \leq d(P^-, P_6^+)$, akkor a 3.1. Következmény miatt

$$k_4^P k^0 k_5^P \angle > \arccos \frac{1}{2r_1} = 51.21 \dots^\circ,$$

és a 3.2. Következmény miatt

$$k_1^P k^0 k_5^P \angle > \arccos \frac{4 + t^2 - 4r_1^2}{4t} + 60^\circ = \arccos \frac{1}{2r_1} + 60^\circ = 111.21 \dots^\circ;$$

így $\sum_{i=4}^6 k_i^P k^0 k_{i+1}^P \angle > 2 \arccos \frac{1}{2r_1} + 60^\circ$. Ha $d(P^-, P_5^+) > d(P^-, P_6^+)$, akkor hasonlóan kapjuk ugyanezt a becslést. Így

$$X > 6 \arcsin \frac{1}{2r_1} + 2 \arccos \frac{1}{2r_1} + 60^\circ = 395.1 \dots^\circ > 360^\circ.$$

Ha $k^0 \in \text{int}(C(k_2^P, 1))$ vagy $k^0 \in \text{int}(C(k_3^P, 1))$, akkor hasonlóan kaphatjuk, hogy

$$X > 6 \arcsin \frac{1}{2r_1} + 2 \arccos \frac{1}{2r_1} + 60^\circ > 360^\circ.$$

(ii) A bizonyítás során ismét a 3.1. Következményt és a 3.2. Következményt használjuk. Mivel az okoskodás hasonló, mint az (i) esetben, ezért csak a becslések végeredményeit írjuk le:

– ha $k^0 \notin \text{int}(C(k_i^P, 1))$ minde $i = 1, 2, 3, 5$ esetén, akkor

$$X > 4 \arcsin \frac{1}{2r_1} + 4 \arccos \frac{1}{2r_1} = 360^\circ,$$

– ha $k^0 \in \text{int}(C(k_5^P, 1))$, akkor

$$X > 4 \arcsin \frac{1}{2r_1} + 2 \arccos \frac{1}{2r_1} + 2 \arccos \frac{4 + t^2 - 4r_1^2}{4t} = 360^\circ;$$

– ha $k^0 \in \text{int}(C(k_1^P, 1))$ vagy $k^0 \in \text{int}(C(k_3^P, 1))$, akkor

$$X > \arccos \frac{4r_1^2 - 3}{4r_1} + 2 \arcsin \frac{1}{2r_1} + 3 \arccos \frac{1}{2r_1} + \arccos \frac{4 + t^2 - 4r_1^2}{4t} > 360^\circ;$$

– ha $k^0 \in \text{int}(C(k_2^P, 1))$, akkor

$$X > 2 \arccos \frac{4r_1^2 - 3}{4r_1} + 4 \arccos \frac{1}{2r_1} > 360^\circ.$$

(iii) A bizonyítás során ismét a 3.1. Következményt és a 3.2. Következményt használjuk. Mivel az okoskodás hasonló, mint az (i) esetben, ezért csak a becslések végeredményeit írjuk le:

– ha $k^0 \notin \text{int}(C(k_i^P, 1))$ minden $i = 1, 2, 4, 5$ esetén, akkor

$$X > 4 \arcsin \frac{1}{2r_1} + 4 \arccos \frac{1}{2r_1} = 360^\circ,$$

– ha $k^0 \in \text{int}(C(k_1^P, 1))$ vagy $k^0 \in \text{int}(C(k_2^P, 1))$ vagy $k^0 \in \text{int}(C(k_4^P, 1))$ vagy $k^0 \in \text{int}(C(k_5^P, 1))$, akkor

$$X > \arccos \frac{4r_1^2 - 3}{4r_1} + 2 \arcsin \frac{1}{2r_1} + 3 \arccos \frac{1}{2r_1} + \arccos \frac{4 + t^2 - 4r_1^2}{4t} > 360^\circ,$$

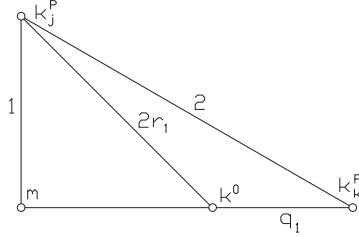
ami a Lemma bizonyítása. \square

3.5. Lemma. Legyen $\mathfrak{F} = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ egy család és $K_i \subset H^+$ pontosan három $K_i \in \mathfrak{F}$ esetén. Legyen továbbá $C_i^+ \subset \text{int } H^+$ minden $K_i \in \mathfrak{F}$ esetén. Ekkor $n \leq 6$.

Bizonyítás. A $k_1^P, k_2^P, \dots, k_n^P$ pontokat értelmezzük úgy, mint a 3.2. Lemmában és tegyük fel, hogy ez a ciklikus sorrendjük. Az egyszerűbb jelölés kedvéért legyen $k_{n+1}^P = k_1^P$. Legyen továbbá $q_1 = \sqrt{3} - \sqrt{4r_1^2 - 1} = 0.48\dots$, $q_2 = \sqrt{5 - 4r_1^2} - 1 = 0.56\dots$ és $q_3 = 0.65\dots$ legyen az

$$x \mapsto x^2 - 4x \cos(5 \arccos \frac{1}{2r_1} + \frac{\pi}{3}) + 4 - 4r_1^2$$

függvény egyetlen gyöke a $[0, 1]$ intervallumban. Ekkor $d(k^0, k_i^P) \geq q_1$ minden i esetén (13. ábra).



13. ábra.

Mivel $q_1 < d$, ezért a 3.3. Következmény miatt $n \leq 7$.

Tegyük fel, hogy $n = 7$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

- (i) $(K_1 \cup K_2 \cup K_3) \subset H^+$; vagy
- (ii) $(K_1 \cup K_2 \cup K_4) \subset H^+$; vagy
- (iii) $(K_1 \cup K_2 \cup K_5) \subset H^+$; vagy
- (iv) $(K_1 \cup K_3 \cup K_5) \subset H^+$.

Úgy, mint a 3.4. Lemma esetén, most is megmutatjuk, hogy $X = \sum_{i=1}^7 k_i^P k^0 k_{i+1}^P \angle > 360^\circ$, ami ellentmondás.

(i) Ha $k^0 \notin \text{int}(C(k_i^P, 1))$ minden $i = 1, 2, 3$ esetén vagy $k^0 \in \text{int}(C(k_2^P, 1))$, akkor

$$X > 4 \arcsin \frac{1}{2r_1} + 5 \arccos \frac{1}{2r_1} > 360^\circ.$$

Az ellenkező esetben, ha $k^0 \in \text{int}(C(k_3^P, 1))$ (az $k^0 \in \text{int}(C(k_1^P, 1))$ esetben a bizonyítás hasonló), akkor

$$X > X - k_3^P k^0 k_4^P \angle > 4 \arcsin \frac{1}{2r_1} + 4 \arccos \frac{1}{2r_1} = 360^\circ.$$

(ii) Ha $k^0 \notin \text{int}(C(k_i^P, 1))$ minden $i = 1, 2, 4$ esetén vagy $k^0 \in \text{int}(C(k_1^P, 1))$ vagy $k^0 \in \text{int}(C(k_2^P, 1))$, akkor könnyű belátni, hogy

$$X > 2 \arcsin \frac{1}{2r_1} + 5 \arccos \frac{1}{2r_1} + 30^\circ > 360^\circ.$$

Így feltesszük, hogy $k^0 \in \text{int}(C(k_4^P, 1))$. Emlékeztetünk egy korábbi jelölésre, miszerint $t = \sqrt{4 - \frac{4r_1^2 - 1}{r_1^2}} - \sqrt{4r_1^2 - \frac{4r_1^2 - 1}{r_1^2}} = 0.909 \dots$. Ha $q_1 \leq d(k^0, k_4^P) \leq t$, akkor K_2 és K_4 érinti egymást. Alkalmazzuk a 3.1. Következményt a K_2, K_4 eltoltakra, amiből $k_2^P k^0 k_4^P \angle \geq \arccos \frac{t^2 + 4r_1^2 - 4}{4tr_1} = 2 \arccos \frac{1}{2r_1} = 102.43 \dots^\circ$. Ha $t < d(k^0, k_4^P) \leq 1$, akkor K_2, K_4 nem érintik egymást. Alkalmazzuk a 3.1. Következményt a K_2, K_3 valamint a K_3, K_4 testekre és kapjuk, hogy $k_2^P k^0 k_4^P \angle \geq 2 \arccos \frac{1}{2r_1}$. Ezután használjuk a 3.1. Következményt és a 3.2. Következményt és kapjuk, hogy

$$X > 2 \arcsin \frac{1}{2r_1} + 5 \arccos \frac{1}{2r_1} + 30^\circ > 360^\circ.$$

(iii) Ha $k^0 \notin \text{int}(C(k_i^P, 1))$ minden $i = 1, 2, 5$ esetén vagy $k^0 \in \text{int}(C(k_1^P, 1))$ vagy $k^0 \in \text{int}(C(k_2^P, 1))$, akkor könnyű belátni, hogy

$$X > 2 \arcsin \frac{1}{2r_1} + 3 \arccos \frac{1}{2r_1} + 150^\circ > 360^\circ.$$

Ha $k^0 \in \text{int}(C(k_5^P, 1))$, akkor

$$X > 2 \arcsin \frac{1}{2r_1} + 2 \arccos \frac{1}{2r_1} + 180^\circ = 360^\circ.$$

(iv) Ha $k^0 \notin \text{int}(C(k_i^P, 1))$ minden $i = 1, 3, 5$ esetén vagy $k^0 \in \text{int}(C(k_3^P, 1))$, akkor mint a (ii) esetben kapjuk

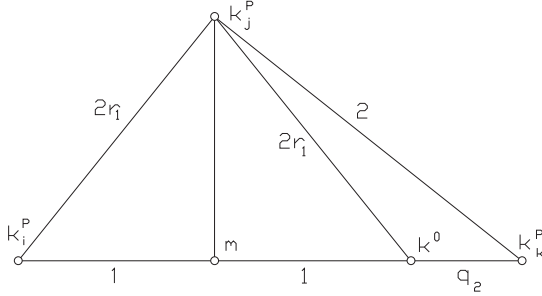
$$X > 6 \arccos \frac{1}{2r_1} + 60^\circ > 360^\circ.$$

Így feltesszük, hogy $k^0 \in \text{int}(C(k_5^P, 1))$. A k_1^P, k_2^P és k_3^P elhelyezkedéséből következik, hogy $d(k^0, k_5^P) \geq q_2$ (14. ábra).

Legyen $Y = \sum_{i=3}^5 k_i^P k^0 k_{i+1}^P \angle$. Ekkor

$$Y > \arccos \frac{4r_1^2 + q_3^2 - 4}{4r_1 q_3} + 30^\circ = 149.6 \dots^\circ, \text{ ha } d(k^0, k_5^P) \in [q_2, q_3),$$

$$Y > 2 \arccos \frac{1}{2r_1} + \arccos \frac{4 + q_3^2 - 4r_1^2}{4q_3} = 146.3 \dots^\circ, \text{ ha } d(k^0, k_5^P) \in [q_3, t) \text{ és}$$



14. ábra.

$$Y \geq 3 \arccos \frac{1}{2r_1} = 153.6 \dots^\circ, \text{ ha } d(k^0, k_5^P) \in [t, 1].$$

Így $Y > 2 \arccos \frac{1}{2r_1} + \arccos \frac{4+q_3^2-4r_1^2}{4q_3} = 146.3 \dots^\circ$ minden esetben. A maradék szögek becslését hasonlóan tehetjük meg mint az (i) esetben, amiből kapjuk az

$$X > 5 \arccos \frac{1}{2r_1} + \arccos \frac{4+q_3^2-4r_1^2}{4q_3} + 60^\circ = 360^\circ$$

egyenlőtlenséget. \square

3.5. A Tétel bizonyítása

Most belátjuk, hogy $H(K) \leq 15$.

Emlékeztetünk egy korábbi jelölésre, miszerint $S = \text{cl}(\mathbb{R}^3 \setminus (H^+ \cup H^-))$.

Tekintsünk egy \mathfrak{F} családot. Legyen $\mathfrak{F}^+ = \{K_i \in \mathfrak{F} \mid K_i \cap \text{int } H^+ \neq \emptyset\}$ és $\mathfrak{F}^- = \{K_i \in \mathfrak{F} \mid K_i \cap \text{int } H^- \neq \emptyset\}$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\text{card } \mathfrak{F}^+ \geq \text{card } \mathfrak{F}^-$. Mivel az S sávban legfeljebb 6 eltolt helyezkedhet el ezért, ha $\text{card } \mathfrak{F}^+ \leq 4$, akkor $\text{card } F \leq 14$, ami az állítás bizonyítása. Így feltesszük, hogy $\text{card } \mathfrak{F}^+ \geq 5$. A 3.3. Következmény miatt $\text{card } \mathfrak{F}^+ \leq 7$. Így három esetet különböztetünk meg:

1. *Eset.* $\text{card } \mathfrak{F}^+ = 5$.

2. *Eset.* $\text{card } \mathfrak{F}^+ = 6$.

3. *Eset.* $\text{card } \mathfrak{F}^+ = 7$.

Lássuk az esetek bizonyítását!

1. *Eset.* $\text{card } \mathfrak{F}^+ = 5$.

A 3.3. Lemma miatt legfeljebb 6 elem lehet az $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}^+$ halmazban, amely eltoltakat nem tartalmazza H^- . Alkalmazzuk a 3.2. Lemmát és kapjuk, hogy az \mathfrak{F} családnak legfeljebb 4 eleme lehet a H^- féltérben. Így $\text{card } \mathfrak{F} \leq 15$.

2. *Eset.* $\text{card } \mathfrak{F}^+ = 6$.

A 3.4. Lemma miatt az \mathfrak{F}^+ családnak legalább 3 eleme belemetsz az int S sávba, azaz $P^+ \cap \text{int } K_i \neq \emptyset$ legalább 3 db i esetén. Ekkor a 3.3. Lemma állítása szerint az \mathfrak{F} család legfeljebb 3 eleme helyezkedhet el az S sávban (mert az \mathfrak{F}^+ elemei, amelyek belemetszenek az int S sávba és az \mathfrak{F} elemei, amelyek az S sávban fekszenek legfeljebb 6). A 3.3. Lemma miatt, az $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}^+$ családnak legfeljebb 6 eleme metsz az int S sávba. Ha a számuk kevesebb, mint 6, akkor a 3.2. Lemma miatt $\text{card } \mathfrak{F} \leq 15$. Így feltesszük, hogy az $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}^+$ család elemei között pontosan 6 elem metsz bele az int S sávba. Korábban említettük, hogy az S sávbeli eltoltak száma legfeljebb 3. Így az \mathfrak{F}^- család legalább 3 eleme metsz bele az int S sávba. Alkalmazva a 3.4. Lemmát kapjuk, hogy az \mathfrak{F} család legfeljebb 3 eleme helyezkedhet el a H^- féltérben, ami az állítás bizonyítása.

3. *Eset.* $\text{card } \mathfrak{F}^+ = 7$.

A 3.4. Lemma és a 3.5. Lemma miatt az \mathfrak{F}^+ családnak legalább 5 eleme belemetsz az int S sávba. Alkalmazva a 3.3. Lemmát kapjuk, hogy az \mathfrak{F} család legfeljebb 1 eleme helyezkedhet el az S sávban. Mivel $\text{card } \mathfrak{F}^+ \geq \text{card } \mathfrak{F}^-$, így $\text{card } \mathfrak{F} \leq 15$. \square

Vegyük észre, hogy az r_1 kis növelése esetén a Hadwiger-szám nem változik.

4. Pontok pakolása 3-dimenziós kockába

4.1. Problémafelvetés

Brass, Moser és Pach [6] könyvében olvashatunk a következő problémáról: A 3-dimenziós egységkockában elhelyezhető n darab pont páronkénti minimális távolságának a maximumának a keresése.

Nyilván ezt a kérdést úgy is felvethetjük, hogy mi a maximális sugara n darab kongruens gömbnek, amelyek elhelyezhetőek egy adott kockában és nem nyúlnak egymásba? Másképp is fogalmazhatunk: Mekkora annak a minimális kockának az élhossza, amelyben elhelyezhető n darab kongruens gömb, amelyek nem nyúlnak egymásba? Vagy: Mekkora annak a minimális kockának az élhossza, amelyben elhelyezhető n darab pont, amely pontok közötti távolság legalább 1?

A következőkben azt keressük, hogy mekkora annak a minimális d -dimenziós kockának az élhossza, amelyben elhelyezhető n darab pont, amely pontok közötti távolság legalább 1?

Vagy: Mekkora a d -dimenziós egységkockában elhelyezhető n darab pont minimális távolságának a maximuma? Jelölje ezt az értéket m_n^d .

Számos eredményt olvashatunk az m_n^d értékekről. Lássunk néhányat!

A probléma két dimenzióban. Könnyen kaphatjuk az $m_2^2 = \sqrt{2}$, $m_3^2 = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $m_4^2 = 1$, $m_5^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ értékeket. A következő eredményeket találjuk $m_6^2 = \frac{\sqrt{13}}{6}$ Schwartz [55], $m_7^2 = 2(2 - \sqrt{3})$ Nurmela és Östergård [42], $m_8^2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ Schaer és Meir [53] és $m_9^2 = \frac{1}{2}$ Schaer [51] munkáiban. Az m_{10}^2 értékének becsléséről sokat olvashatunk [17], [18], [20], [22], [36], [37], [52], [54], [64], de Peikert - többek között - [20] adta meg a minimálpolinomját az m_{10}^2 értékének, amely fokszáma 18. Az $n = 27$ értékig Peikert - többek között - [45] és Nurmela [43], az $n = 50$ értékig Nurmela és Östergård [43], [44] és az $n = 100$ értékig Casado, García, Szabó, Csendes [7], [8] adtak computer segítségével becsléseket az m_n^2 értékére. Sokan másoknál is olvashatunk az m_n^2 becsléséről pl.: Markót [34], Maranas, Floudas, Pardalos [35], Boll, Donovan, Graham, Lubachevsky [2], Lubachevsky, Graham, Stillinger [33]. A pontos értékek $11 \leq n$ esetén $m_{14}^2 = 2\frac{4-\sqrt{3}}{13}$ Wengerodt [66], $m_{16}^2 = \frac{1}{3}$ Wengerodt [65], $m_{25}^2 = \frac{1}{4}$ Wengerodt [67] és

$m_{36}^2 = \frac{1}{5}$ Kirchner, Wengerodt [32].

A probléma három dimenzióban. Schaer [47], [48], [49], [50] megadta m_n^3 értékét, ha $n \leq 10$ ($m_2^3 = \sqrt{3}$, $m_3^3 = m_4^3 = \sqrt{2}$, $m_5^3 = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $m_6^3 = 3\frac{\sqrt{2}}{4}$, $m_7^3 = \sqrt{1+2p^2} = 1.001089825\dots$, ahol $p := \frac{\sqrt{5+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}}{\sqrt{6}}$, $m_8^3 = 1$, $m_9^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $m_{10}^3 = \frac{3}{4}$) és ezekben az esetekben megadta az optimális elrendezést. Goldberg [16] megadott elrendezéseket $n = 27$ értékig és remélte, hogy majd lesznek, akik bebizonyítják, hogy ezek a legjobb elrendezések (és így a legjobb m_n^3 értékek), vagy megjavítják az ott leírt m_n^3 értékeket. Goldberg sejtése az volt, hogy $m_{14}^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Mi megmutatjuk, hogy ez a sejtés igaz. Gensane [14] mind javított Goldberg sejtett m_n^3 értékein a $11 \leq n \leq 26$ tartományban kivéve $n = 13, 14, 18$ eseteket.

A probléma négy dimenzióban. Nyilván $m_2^4 = 2$. Meir aztán Bálint - többek között - [1] belátta, hogy a 4-dimenziós egységkockában 17 olyan pont van, amelyek páronkénti távolsága legalább 1 és az elrendezés egyértelmű. Tehát $m_{17}^4 = 1$.

A probléma n dimenzióban. Nyilván $m_2^n = \sqrt{n}$.

Chepanov, Ryvskov, Yakovlev [9] adott magasabb dimenziós eredményeket.

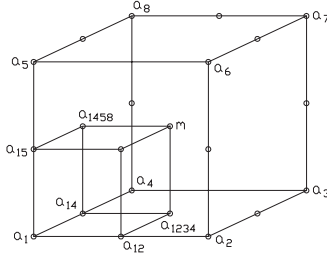
Mi azt a legkisebb 3-dimenziós kockát keressük, amelyben elhelyezhető 14 olyan pont, amely pontok páronkénti távolsága legalább 1.

5. Tétel. *A $\sqrt{2}$ élű 3-dimenziós kocka a legkisebb kocka, amelyben elhelyezhető 14 olyan pont, amely pontok páronkénti távolsága legalább 1.*

A tétel állításából következik, hogy $m_{14}^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.2. Jelölések

Legyen $\mathbb{K} = \text{conv}((0, 0, 0), (\sqrt{2}, 0, 0), (0, \sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), (0, 0, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), (0, \sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}))$. Legyen $0 < \epsilon < 0.13$ egy rögzített érték. Legyen $H := \frac{\sqrt{2}}{2}$, $h := \frac{\sqrt{2}}{2} - \epsilon$ és legyenek az $a_1(0, 0, 0), a_2(2h, 0, 0), a_3(2h, 2h, 0), a_4(0, 2h, 0), a_5(0, 0, 2h), a_6(2h, 0, 2h), a_7(2h, 2h, 2h), a_8(0, 2h, 2h)$ pontok a $\mathbb{K}_\epsilon \subset \mathbb{R}^3$ kocka csúspontjai (15. ábra). Legyen a_{ij} az $a_i a_j$ él felezőpontja. Legyen a_{ijkl} az $a_i a_j a_k a_l$ lap középpontja. Legyen $m(h, h, h)$ a \mathbb{K}_ϵ kocka középpontja. Legyen \mathbb{K}_ϵ^i a \mathbb{K}_ϵ



15. ábra.

kocka homotetikus képe, ahol a homotécia aránya $\frac{1}{2}$ és középpontja a_i ($i = 1, \dots, 8$). Jelölje P_α^i az $i = \alpha$ egyenletű síkot, ahol $i \in \{x, y, z\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Jelölje $P_{\alpha,\beta}^i$ a P_α^i, P_β^i síkok által határolt zárt sávot, ahol $i \in \{x, y, z\}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ és $\alpha \neq \beta$. Jelölje $H_{f(x,y,z)}^+$, $(H_{f(x,y,z)}^-)$ az $f(x, y, z) = 0$ sík által határolt m pontot tartalmazó (nem tartalmazó) zárt félteret, ahol az $f(x, y, z) = 0$ sík nem tartalmazza az m pontot. Az $\mathfrak{F} \subset \mathbb{K}$ legyen olyan diszkrét pontrendszer, amelyre igaz, hogy minden $p, q \in \mathfrak{F}$ ($p \neq q$) esetén $d(p, q) \geq 1$.

A $\mathbb{K}_\epsilon^i, \mathbb{K}_\epsilon^j$ ($i \neq j$) kockákat *(lap)szomszédos kockáknak* nevezzük, ha a két kockának van közös lapja, valamint a $\mathbb{K}_\epsilon^i, \mathbb{K}_\epsilon^j, \mathbb{K}_\epsilon^k, \mathbb{K}_\epsilon^l$ (i, j, k, l mind különböző) kockákat *(él)szomszédos kockáknak* nevezzük, ha a négy kockának van közös éle. A $\mathbb{K}_\epsilon^i, \mathbb{K}_\epsilon^j$ ($i \neq j$) kockákat *szembenlévőknek* vagy *szemköztes kockáknak* nevezzük, ha csak egy közös csúcsuk van. A $\mathbb{K}_\epsilon^1, \mathbb{K}_\epsilon^2, \dots, \mathbb{K}_\epsilon^6$ különböző kockák egy láncot alkotnak, ha mindegyik \mathbb{K}_ϵ^i kockának pontosan két $\mathbb{K}_\epsilon^{i-1}, \mathbb{K}_\epsilon^{i+1}$ (lap)szomszédja van, ahol $(\mathbb{K}_\epsilon^7 = \mathbb{K}_\epsilon^1$ és $\mathbb{K}_\epsilon^0 = \mathbb{K}_\epsilon^6)$.

4.3. A bizonyítás vázlata

Emlékeztetőül a

5. Tétel. *A $\sqrt{2}$ élű 3-dimenziós kocka a legkisebb kocka, amelyben elhelyezhető 14 olyan pont, amely pontok páronkénti távolsága legalább 1.*

A bizonyítás vázlata a következő.

1. *Lépés.* $\text{card}(\mathbb{K} \cap \mathfrak{F}) \geq 14$.
2. *Lépés.* $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon \cap \mathfrak{F}) \leq 16$.
3. *Lépés.* $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon \cap \mathfrak{F}) \leq 14$.
4. *Lépés.* $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon \cap \mathfrak{F}) < 14$.

1. *Lépés.* Megadunk egy pontthalmazt, amely 14 pontból áll, amely pontok páronkénti távolsága legalább 1 és mindegyik pont a \mathbb{K} kockában van. Így $\text{card}(\mathbb{K} \cap \mathfrak{F}) \geq 14$.

Ha $\epsilon \geq 0.13$, akkor $\text{diam}(\mathbb{K}_\epsilon^i) < 1$, azaz $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon^i \cap \mathfrak{F}) \leq 1$ minden $i = 1, 2, \dots, 8$, azaz $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon \cap \mathfrak{F}) \leq 8$. Így feltesszük, hogy $\epsilon \in (0, 0.13)$ egy rögzített szám.

2. *Lépés.* Indirekt bizonyítunk. A bizonyítás a \mathbb{K}_ϵ^i kockában elhelyezkedő háromszög területének becslésén alapszik. A 4.1. Lemmából és egy kis kockában elhelyezkedő maximális területű háromszög területének összehasonlításából kapjuk az ellentmondást. Így egy kis kockában az \mathfrak{F} halmazból legfeljebb 2 helyezkedhet el, azaz $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon \cap \mathfrak{F}) \leq 16$.

3. *Lépés.* Indirekten bizonyítunk és indukcióval bizonyítunk. Sokszor használjuk a 4.2. Lemmát az indukciós okoskodásban, hogy megkapjuk, hogy 4 szomszédos kis kockában nem lehet 8 darab \mathfrak{F} halmazbeli pont, azaz $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon \cap \mathfrak{F}) \leq 14$. A 14 pont csak úgy helyezkedhet el a \mathbb{K}_ϵ kockában, hogy két szemközt es kis kockában fekszik egy-egy pont, a többi kis kockákban (amik egy láncot formálnak) pedig két-két pont.

Az ellentmondás azon alapszik, hogy a $(H - 0.21), (H - 0.21), h$ élű téglatest átmérője kisebb, mint 1 minden $\epsilon \in (0, 0.13)$ esetén.

4. *Lépés.* Indirekt bizonyítunk. A 4.2. és a 4.3. Lemmákat sokszor használjuk, hogy megkapjuk, hogy 6 kis kockában, amelyek egy láncot formálnak, nem lehet 12 darab \mathfrak{F} halmazbeli pont, azaz $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon \cap \mathfrak{F}) < 14$. Az ellentmondás a Megjegyzéseken és a Lemmákon alapszik.

Ebből következik, hogy a $\sqrt{2}$ élű kocka a legkisebb olyan kocka, amelyben elfér 14 olyan pont, amely pontok páronkénti távolsága legalább 1. Ebből következik, hogy $m_{14}^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.4. Előkészületek

A következő Megjegyzéseket, Lemmákat és Következményeket fogjuk használni.

4.1. Megjegyzés. Ha $(x, y) \in [0, H] \times (0, 0.21]$, akkor

$$(H - x)^2 + (H - y)^2 + x^2 < 1.$$

Bizonyítás. Tekintsük a következő függvényt

$$f(x, y) := (H - x)^2 + (H - y)^2 + x^2.$$

Ekkor a

$$g_1(y) = f(0, y), \quad g_2(y) = f(H, y), \quad g_3(x) = f(x, y_0)$$

függvények szigorúan konvexek ($g_1''(y) = 2$, $g_2''(y) = 2$, $g_3''(x) = 4$), ahol $(x, y) \in [0, H] \times [0, 0.21]$ és $y_0 \in [0, 0.21]$ egy rögzített szám. Mivel

$$g_1(0) = f(0, 0) = 1, \quad g_1(0.21) = f(0, 0.21) = 0.74 \dots,$$

$$g_2(0) = f(H, 0) = 1, \quad g_2(0.21) = f(H, 0.21) = 0.74 \dots,$$

így

$$f(x, y) \leq 1,$$

ha $(x, y) \in [0, H] \times [0, 0.21]$ és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $(x, y) = (0, 0)$ vagy $(x, y) = (H, 0)$, azaz

$$f(x, y) < 1,$$

ha $(x, y) \in [0, H] \times (0, 0.21]$. \square

4.2. Megjegyzés. Ha $(x, y) \in [0, H] \times (0, 0.21]$ és $x + y \leq H$, akkor

$$(H - x)^2 + (H - y)^2 + (x + y)^2 < 1.$$

Bizonyítás. Legyen $f(x, y) := (H - x)^2 + (H - y)^2 + (x + y)^2$. Ekkor a $g_1(y) = f(0, y)$, $g_2(y) = f(H - y, y)$, $g_3(x) = f(x, y_0)$ függvények szigorúan konvexek ($g_1''(y) = 4$, $g_2''(y) = 4$, $g_3''(x) = 4$), ahol $(x, y) \in [0, H] \times [0, 0.21]$, $x + y \leq H$ és $y_0 \in [0, 0.21]$ egy

rögzített szám. Mivel $g_1(0) = f(0, 0) = 1$, $g_1(0.21) = f(0, 0.21) = 0.79 \dots$, $g_2(0) = f(H, 0) = 1$, $g_2(0.21) = f(H - 0.21, 0.21) = 0.79 \dots$, így $f(x, y) \leq 1$, ha $(x, y) \in [0, H] \times [0, 0.21]$, $x + y \leq H$ és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $(x, y) = (0, 0)$ vagy $(x, y) = (H, 0)$, azaz $f(x, y) < 1$, ha $(x, y) \in [0, H] \times (0, 0.21]$ és $x + y \leq H$. \square

4.3. Megjegyzés. Ha $(x, y) \in [0, H] \times (0, 0.21]$ és $x + 2y \leq H$, akkor

$$(H - x)^2 + (H - y)^2 + (x + 2y)^2 < 1.$$

Bizonyítás. Legyen $f(x, y) := (H - x)^2 + (H - y)^2 + (x + 2y)^2$. Ekkor a $g_1(y) = f(0, y)$, $g_2(y) = f(H - 2y, y)$, $g_3(x) = f(x, y_0)$ függvények szigorúan konvexek ($g_1''(y) = 10$, $g_2''(y) = 10$, $g_3''(x) = 4$), ahol $(x, y) \in [0, H] \times [0, 0.21]$, $x + 2y \leq H$ és $y_0 \in [0, 0.21]$ egy rögzített szám. Mivel $g_1(0) = f(0, 0) = 1$, $g_1(0.21) = f(0, 0.21) = 0.92 \dots$, $g_2(0) = f(H, 0) = 1$, $g_2(0.21) = f(H - 0.42, 0.21) = 0.92 \dots$, így $f(x, y) \leq 1$, ha $(x, y) \in [0, H] \times [0, 0.21]$, $x + 2y \leq H$ és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $(x, y) = (0, 0)$ vagy $(x, y) = (H, 0)$, azaz $f(x, y) < 1$, ha $(x, y) \in [0, H] \times (0, 0.21]$ és $x + 2y \leq H$. \square

4.4. Megjegyzés. Ha $(x, y) \in [0, H] \times (0, 0.21]$ és $x + 2y \leq H$, akkor

$$(H - x - y)^2 + H^2 + (x + y)^2 < 1.$$

Bizonyítás. Legyen $f(x, y) := (H - x - y)^2 + H^2 + (x + y)^2$. Ekkor a $g_1(y) = f(0, y)$, $g_2(y) = f(H - 2y, y)$, $g_3(x) = f(x, y_0)$ függvények szigorúan konvexek ($g_1''(y) = 4$, $g_2''(y) = 4$, $g_3''(x) = 4$), ahol $(x, y) \in [0, H] \times [0, 0.21]$, $x + 2y \leq H$ és $y_0 \in [0, 0.21]$ egy rögzített szám. Mivel $g_1(0) = f(0, 0) = 1$, $g_1(0.21) = f(0, 0.21) = 0.79 \dots$, $g_2(0) = f(H, 0) = 1$, $g_2(0.21) = f(H - 0.42, 0.21) = 0.79 \dots$, így $f(x, y) \leq 1$, ha $(x, y) \in [0, H] \times [0, 0.21]$, $x + 2y \leq H$ és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $(x, y) = (0, 0)$ vagy $(x, y) = (H, 0)$, azaz $f(x, y) < 1$, ha $(x, y) \in [0, H] \times (0, 0.21]$ és $x + 2y \leq H$. \square

4.5. Megjegyzés. Ha $(x, y) \in [0, H] \times (0, 0.21]$ és $x + 2y \leq H$, akkor

$$(H - x - 2y)^2 + (H + y)^2 + x^2 < 1.$$

Bizonyítás. Legyen $f(x, y) := (H - x - 2y)^2 + (H + y)^2 + x^2$. Ekkor a $g_1(y) = f(0, y)$, $g_2(y) = f(H - 2y, y)$, $g_3(x) = f(x, y_0)$ függvények szigorúan konvexek ($g_1'(y) = 10$, $g_2'(y) = 10$, $g_3'(x) = 4$), ahol $(x, y) \in [0, H] \times [0, 0.21]$, $x + 2y \leq H$ és $y_0 \in [0, 0.21]$ egy rögzített szám. Mivel $g_1(0) = f(0, 0) = 1$, $g_1(0.21) = f(0, 0.21) = 0.92 \dots$, $g_2(0) = f(H, 0) = 1$, $g_2(0.21) = f(H - 0.42, 0.21) = 0.92 \dots$, így $f(x, y) \leq 1$ ha $(x, y) \in [0, H] \times [0, 0.21]$, $x + 2y \leq H$ és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $(x, y) = (0, 0)$ vagy $(x, y) = (H, 0)$, azaz $f(x, y) < 1$, ha $(x, y) \in [0, H] \times (0, 0.21]$ és $x + 2y \leq H$. \square

4.6. Megjegyzés. Ha $(x, y) \in (0, 0.24] \times (0, 0.24]$, akkor

$$(H - x)^2 + (H - y)^2 + (2x + y)^2 < 1.$$

Bizonyítás. Legyen $f(x, y) := (H - x)^2 + (H - y)^2 + (2x + y)^2$. Ekkor a $g_1(y) = f(0, y)$, $g_2(y) = f(0.24, y)$, $g_3(x) = f(x, y_0)$ függvények szigorúan konvexek ($g_1'(y) = 4$, $g_2'(y) = 4$, $g_3'(x) = 10$), ahol $(x, y) \in [0, 0.24] \times [0, 0.24]$ és $y_0 \in [0, 0.21]$ egy rögzített szám. Mivel $g_1(0) = f(0, 0) = 1$, $g_1(0.24) = f(0, 0.24) = 0.77 \dots$, $g_2(0) = f(0.24, 0) = 0.94$, $g_2(0.24) = f(0.24, 0.24) = 0.95 \dots$, így $f(x, y) \leq 1$, ha $(x, y) \in [0, 0.24] \times [0, 0.24]$ és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $(x, y) = (0, 0)$, azaz $f(x, y) < 1$, ha $(x, y) \in (0, 0.24] \times (0, 0.24]$. \square

4.7. Megjegyzés. Ha $(x, y) \in (0, 0.21] \times (0, 0.21]$ és $x + y \leq 0.21$, akkor

$$(H - 2x - y)^2 + (H + x)^2 + (x + y)^2 < 1.$$

Bizonyítás. Legyen $f(x, y) := (H - 2x - y)^2 + (H + x)^2 + (x + y)^2$. Ekkor a $g_1(y) = f(0, y)$, $g_2(y) = f(0.21 - y, y)$, $g_3(x) = f(x, y_0)$ függvények szigorúan konvexek ($g_1'(y) = 4$, $g_2'(y) = 4$, $g_3'(x) = 12$), ahol $(x, y) \in [0, 0.21] \times [0, 0.21]$ és $x + y \leq 0.21$ és $y_0 \in [0, 0.21]$ egy rögzített szám. Mivel $g_1(0) = f(0, 0) = 1$, $g_1(0.21) = g_2(0.21) = f(0, 0.21) = 0.79 \dots$, $g_2(0) = f(0.21, 0) = 0.96 \dots$, így $f(x, y) \leq 1$, ha $(x, y) \in [0, 0.21] \times [0, 0.21]$ és $x + y \leq 0.21$ és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $(x, y) = (0, 0)$, azaz $f(x, y) < 1$, ha $(x, y) \in (0, 0.21] \times (0, 0.21]$ és $x + y \leq 0.21$. \square

4.8. Megjegyzés. Ha $(x, y) \in (0, 0.21] \times (0, 0.21]$, akkor

$$(H - 2x - y)^2 + (H + x)^2 + y^2 < 1.$$

Bizonyítás. Legyen $f(x, y) := (H - 2x - y)^2 + (H + x)^2 + y^2$. Ekkor a $g_1(y) = f(0, y)$, $g_2(y) = f(0.21, y)$, $g_3(x) = f(x, y_0)$ függvények szigorúan konvexek ($g_1''(y) = 4$, $g_2''(y) = 4$, $g_3''(x) = 10$), ahol $(x, y) \in [0, 0.21] \times [0, 0.21]$ és $y_0 \in [0, 0.21]$ egy rögzített szám. Mivel $g_1(0) = f(0, 0) = 1$, $g_1(0.21) = f(0, 0.21) = 0.79 \dots$, $g_2(0) = f(0.21, 0) = 0.92 \dots$, $g_2(0.21) = f(0.21, 0.21) = 0.89 \dots$, így $f(x, y) \leq 1$, ha $(x, y) \in [0, 0.21] \times [0, 0.21]$ és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $(x, y) = (0, 0)$, azaz $f(x, y) < 1$, ha $(x, y) \in (0, 0.21] \times (0, 0.21]$. \square

4.9. Megjegyzés. Ha $(\psi_1, \psi_2, \epsilon) \in (0, 0.24) \times (0, 0.24) \times (0, 0.13]$, akkor

$$h^2 \left((1 - \sin \psi_1)^2 + (1 - \sin \psi_2)^2 + (2 - \cos \psi_1 - \cos \psi_2)^2 \right) < 1.$$

Bizonyítás. Tekintsük a következő becsléseket.

$$\begin{aligned} h^2 \left((1 - \sin \psi_1)^2 + (1 - \sin \psi_2)^2 + (2 - \cos \psi_1 - \cos \psi_2)^2 \right) &< \\ \frac{1}{2} \left((1 - \sin \psi_1)^2 + (1 - \sin \psi_2)^2 + (2 - \cos \psi_1 - \cos \psi_2)^2 \right) &= \\ 4 - \sin \psi_1 - \sin \psi_2 - 2 \cos \psi_1 - 2 \cos \psi_2 + \cos \psi_1 \cos \psi_2. \end{aligned}$$

Legyen

$$f(\psi_1, \psi_2) := 4 - \sin \psi_1 - \sin \psi_2 - 2 \cos \psi_1 - 2 \cos \psi_2 + \cos \psi_1 \cos \psi_2.$$

Mivel

$$\begin{aligned} f'_{\psi_1}(\psi_1, \psi_2) &= -\cos \psi_1 + 2 \sin \psi_1 - \sin \psi_1 \cos \psi_2 < -\cos \psi_1 + 2 \sin \psi_1 < \\ &-\cos 0.24 + 2 \sin 0.24 < 0 \end{aligned}$$

minden $(\psi_1, \psi_2) \in [0, 0.24) \times [0, 0.24)$ esetén és hasonlóan

$$f'_{\psi_2}(\psi_1, \psi_2) < 0,$$

ha $(\psi_1, \psi_2) \in [0, 0.24) \times [0, 0.24)$, így

$$1 = f(0, 0) > f(0, \psi_2) > f(\psi_1, \psi_2) \text{ ahol } (\psi_1, \psi_2) \in (0, 0.24) \times (0, 0.24). \quad \square$$

4.10. Megjegyzés. Ha $(\psi, \epsilon) \in (0, 0.24) \times (0, 0.13]$, akkor

$$h^2 \left((1 - \sin \psi)^2 + (1 - \cos \psi + \sin \psi)^2 + 1 \right) < 1.$$

Bizonyítás. Tekintsük a következő becsléseket.

$$\begin{aligned} & h^2 \left((1 - \sin \psi)^2 + (1 - \cos \psi + \sin \psi)^2 + 1 \right) < \\ & \frac{1}{2} \left((1 - \sin \psi)^2 + (1 - \cos \psi + \sin \psi)^2 + 1 \right) = \frac{5}{2} - \cos \psi - \frac{1}{2} \cos^2 \psi - \cos \psi \sin \psi < \\ & \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 \psi - \cos \psi \sin \psi = 1 + \frac{3}{2} \sin^2 \psi - \cos \psi \sin \psi = 1 + \sin \psi \left(\frac{3}{2} \sin \psi - \cos \psi \right) < \\ & 1 + \sin 0 = 1, \text{ ha } \psi \in (0, 0.24). \end{aligned}$$

Az utóbbi egyenlőtlenség a $\frac{3}{2} \sin \psi - \cos \psi < 0$ egyenlőtlenségből következik. \square

4.11. Megjegyzés. Ha $(\psi, \epsilon) \in (0, 0.24) \times (0, 0.13]$, akkor

$$h^2 \left((1 - 2 \sin \psi)^2 + (2 - \cos \psi)^2 + \sin^2 \psi \right) < 1.$$

Bizonyítás. Tekintsük a következő becsléseket.

$$\begin{aligned} & h^2 \left((1 - 2 \sin \psi)^2 + (2 - \cos \psi)^2 + \sin^2 \psi \right) < \\ & \frac{1}{2} \left((1 - 2 \sin \psi)^2 + (2 - \cos \psi)^2 + \sin^2 \psi \right) = 5 - 2 \sin \psi - 2 \cos \psi - 2 \cos^2 \psi < \\ & 5 - 2 \sin \psi - 4 \cos^2 \psi = 1 + 4 \sin^2 \psi - 2 \sin \psi = 1 + 2 \sin \psi (2 \sin \psi - 1) < 1 + 2 \sin 0 = 1, \\ & \text{ha } \psi \in (0, 0.24). \text{ Az utóbbi egyenlőtlenség a } 2 \sin \psi - 1 < 0 \text{ egyenlőtlenségből} \\ & \text{következik. } \square \end{aligned}$$

4.12. Megjegyzés. Ha $\epsilon \in (0, 0.13)$, akkor

$$(h - 0.139)^2 + \left(2h - \sqrt{h^2 - 0.139^2} \right)^2 < 1.$$

Bizonyítás. Legyen $f(\epsilon) = (h - 0.139)^2 + \left(2h - \sqrt{h^2 - 0.139^2} \right)^2$. Mivel

$$f'(\epsilon) = -2(h - 0.139) + 2(-2h + \sqrt{h^2 - 0.139^2}) \left(2 - \frac{2h}{2\sqrt{h^2 - 0.139^2}}\right),$$

$$h - 0.139 > H - 0.13 - 0.139 > 0,$$

$$-2h + \sqrt{h^2 - 0.139^2} \leq 2 \cdot 0.13 - \sqrt{2} + \sqrt{H^2 - 0.139^2} = -0.46 \dots < 0$$

és

$$2 - \frac{2h}{2\sqrt{h^2 - 0.139^2}} \geq 2 - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{(H - 0.13)^2 - 0.139^2}} = 0.73 \dots > 0.$$

Így $f'(\epsilon) < 0$, ha $\epsilon \in (0, 0.13)$. Ebből következik $\max_{\epsilon \in [0, 0.13]} (f(\epsilon)) = f(0) < 1$. \square

4.1. Lemma. *Ha C egy d -dimenziós kocka ($d \geq 2$) és $\{p_1, p_2, p_3\} \subset C$ nem kollineáris pontok, akkor p_1, p_2, p_3 pontokat kicserélhetjük a C kocka csúcspontjaira, miközben a p_1, p_2, p_3 háromszög területe nem csökken.*

Bizonyítás. A kocka lapjainak dimenziója szerinti indukcióval bizonyítunk.

Ha p_1, p_2, p_3 pontok mindegyike a C kocka csúcspontja, akkor készen vagyunk.

Feltesszük, hogy a p_1 nem csúcsa a C kockának.

Ha p_1 nincs a C felületén, akkor legyen E_n egy olyan egyenes, amely átmegy a p_1 ponton és a C kocka egy csúcspontján. Legyen $\{q_{1n}, q_{2n}\}$ az E_n egyenes és a C kocka felületének a metszéspontjai. Vegyük észre, hogy a q_{1n}, q_{2n} pontok egyike a C kocka csúcspontja, a másik pont pedig a C kocka egyik $(n - 1)$ -dimenziós lapján fekszik. Ekkor

$$\text{Area}(p_1 p_2 p_3) \leq \max(\text{Area}(q_{1n} p_2 p_3), \text{Area}(q_{2n} p_2 p_3)).$$

Feltesszük, hogy $\text{Area}(p_1 p_2 p_3) \leq \text{Area}(q_{1n} p_2 p_3)$ és a p_1 pontot kicseréljük a q_{1n} pontra. Ezen csere közben a $p_1 p_2 p_3$ háromszög területe nem csökken. Így a p_1 a C valamelyik csúcspontja vagy a C egyik $(n - 1)$ -dimenziós lapján helyezkedik el.

Most megmutatjuk: ha p_1 a C kocka $(n - k)$ -dimenziós ($n - k \geq 2$) határán fekszik és az $(n - k - 1)$ -dimenziós határán nincs rajta, akkor a p_1 pontot kicserélhetjük a C kocka $(n - k - 1)$ -dimenziós határán elhelyezkedő pontra, miközben a p_1, p_2, p_3 háromszög területe nem csökken.

Tegyük fel, hogy a p_1 pont az $(n - k)$ -dimenziós L^{n-k} lapon helyezkedik el. Legyen E_{n-k} egy olyan egyenes, amely átmegy a p_1 ponton és az L^{n-k} lap egy csúcspontján.

Legyen $\{q_{1(n-k)}, q_{2(n-k)}\}$ az E_{n-k} egyenes és az L^{n-k} relatív határának a metszéspontjai. Vegyük észre, hogy a $q_{1(n-k)}, q_{2(n-k)}$ pontok egyike a C kocka csúcspontja, a másik pont pedig egy $(n-k-1)$ -dimenziós lapon fekszik. Ekkor

$$\text{Area}(p_1 p_2 p_3) \leq \max(\text{Area}(q_{1(n-k)} p_2 p_3), \text{Area}(q_{2(n-k)} p_2 p_3)).$$

Feltesszük, hogy $\text{Area}(p_1 p_2 p_3) \leq \text{Area}(q_{1(n-k)} p_2 p_3)$ és a p_1 pontot kicseréljük a $q_{1(n-k)}$ pontra. Ezen csere közben a $p_1 p_2 p_3$ háromszög területe nem csökken. Így a p_1 a C kocka valamelyik csúcspontja vagy az egyik $(n-k-1)$ -dimenziós L^{n-k-1} lapon fekszik. Nyilván, ha $k = n-1$, akkor azt kapjuk, hogy a p_1 pontot kicseréltük a C kocka egyik csúcspontjára, miközben a p_1, p_2, p_3 háromszög területe nem csökken.

Hasonlóan a p_2, p_3 pontokat is kicserélhetjük a C kocka egyik csúcspontjára, miközben a p_1, p_2, p_3 háromszög területe nem csökken.

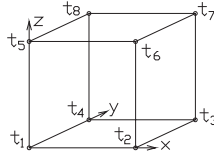
Ezzel beláttuk a Lemma állítását. \square

4.2. Lemma. *Ha $(\epsilon, \delta) \in (0, 0.13] \times (0, 0.21]$, $\epsilon \leq \delta$, akkor a $(H - \delta), (H + \delta), h$ élő téglatestben nem fér el 3 olyan pont, amely pontok páronkénti távolsága legalább 1.*

Bizonyítás. Egy erősebb állítást bizonyítunk:

Ha $\delta \in (0, 0.21]$, akkor a $(H - \delta), (H + \delta), H$ élő téglatestben nem fér el 3 olyan pont, amely pontok páronkénti távolsága legalább 1.

Legyen T a $t_1(0, 0, 0)$, $t_2(H - \delta, 0, 0)$, $t_3(H - \delta, H + \delta, 0)$, $t_4(0, H + \delta, 0)$, $t_5(0, 0, H)$, $t_6(H - \delta, 0, H)$, $t_7(H - \delta, H + \delta, H)$, $t_8(0, H + \delta, H)$ csúcsokkal rendelkező téglatest, azaz $T = [0, H - \delta] \times [0, H + \delta] \times [0, H]$ (16. ábra). Legyen t_{ij} a $t_i t_j$ szakasz felezőpontja



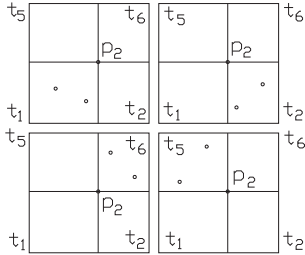
16. ábra.

minden $i, j = 1, \dots, 8; i \neq j$ esetén.

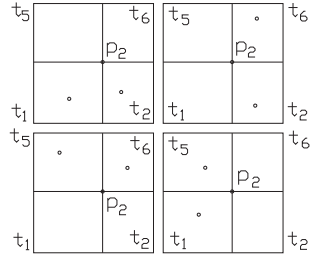
Indirekt bizonyítunk. Feltesszük, hogy van 3 olyan pont a T téglatestben, amely pontok páronkénti távolsága legalább 1. Legyenek p_1, p_2, p_3 ezek a pontok. Mivel $\text{diam}(P_\beta^y \cap T) < 1$, ahol $\beta \in [0, H + \delta]$, így $d(P_0^y, p_1), d(P_0^y, p_2), d(P_0^y, p_3)$ távolságok különbözőek. Így feltehetjük, hogy $d(P_0^y, p_1) < d(P_0^y, p_2) < d(P_0^y, p_3)$. A $p_1, (p_3)$ pontot kicseréljük a $p_1, (p_3)$ pont $P_0^y, (P_{H+\delta}^y)$ síkra való merőleges vetületére. Ezen cserék közben a p_1, p_2, p_3 pontok páronkénti távolsága nem csökken. A p_i pont koordinátái legyenek (x_i, y_i, z_i) , minden $i = 1, 2, 3$ esetén. Ekkor

$$y_1 = 0, \quad y_3 = H + \delta.$$

Mivel az $((x_1 = x_2 \text{ és } z_1 = z_2) \text{ vagy } (x_3 = x_2 \text{ és } z_3 = z_2))$ logikai formula nem lehet igaz, ezért három esetet különböztetünk meg:



17. ábra.



18. ábra.

1. Eset.

$(x_1 \leq x_2, x_3 \leq x_2, z_1 < z_2, z_3 < z_2)$, vagy $(x_1 > x_2, x_3 > x_2, z_1 \leq z_2, z_3 \leq z_2)$, vagy $(x_1 \geq x_2, x_3 \geq x_2, z_1 > z_2, z_3 > z_2)$, vagy $(x_1 < x_2, x_3 < x_2, z_1 \geq z_2, z_3 \geq z_2)$.

(A 17. ábra mutatja a p_1, p_2, p_3 pontok merőleges vetületét a P_0^y síkra.)

2. Eset.

$(x_1 \leq x_2, x_3 > x_2, z_1 < z_2, z_3 \leq z_2)$, vagy $(x_1 > x_2, x_3 \leq x_2, z_1 \leq z_2, z_3 < z_2)$, vagy $(x_1 > x_2, x_3 \geq x_2, z_1 \leq z_2, z_3 > z_2)$, vagy $(x_1 \geq x_2, x_3 > x_2, z_1 > z_2, z_3 \leq z_2)$, vagy $(x_1 \geq x_2, x_3 < x_2, z_1 > z_2, z_3 \geq z_2)$, vagy $(x_1 < x_2, x_3 \geq x_2, z_1 \geq z_2, z_3 > z_2)$, vagy $(x_1 < x_2, x_3 \leq x_2, z_1 \geq z_2, z_3 < z_2)$, vagy $(x_1 \leq x_2, x_3 < x_2, z_1 < z_2, z_3 \geq z_2)$.

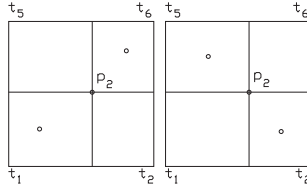
(A 18. ábra mutatja a p_1, p_2, p_3 pontok merőleges vetületét a P_0^y síkra.)

3. Eset.

$(x_1 \leq x_2, x_3 \geq x_2, z_1 < z_2, z_3 > z_2)$, vagy $(x_1 \geq x_2, x_3 \leq x_2, z_1 > z_2, z_3 < z_2)$, vagy $(x_1 > x_2, x_3 < x_2, z_1 \leq z_2, z_3 \geq z_2)$, vagy $(x_1 < x_2, x_3 > x_2, z_1 \geq z_2, z_3 \leq z_2)$.

(A 19. ábra mutatja a p_1, p_2, p_3 pontok merőleges vetületét a P_0^y síkra.)

Lássuk az esetek bizonyítását!



19. ábra.

1. Eset.

$(x_1 \leq x_2, x_3 \leq x_2, z_1 < z_2, z_3 < z_2)$, vagy $(x_1 > x_2, x_3 > x_2, z_1 \leq z_2, z_3 \leq z_2)$, vagy $(x_1 \geq x_2, x_3 \geq x_2, z_1 > z_2, z_3 > z_2)$, vagy $(x_1 < x_2, x_3 < x_2, z_1 \geq z_2, z_3 \geq z_2)$.

Feltesszük, hogy $x_1 \leq x_2, x_3 \leq x_2, z_1 < z_2, z_3 < z_2$. (A maradék három eset bizonyítása hasonló.)

Mivel az $x_1 \neq x_3$ és $z_1 \neq z_3$, így négy esetet különböztetünk meg:

1.1. Eset. $x_1 > x_3$ és $z_1 \leq z_3$.

1.2. Eset. $x_1 \geq x_3$ és $z_1 > z_3$.

1.3. Eset. $x_1 < x_3$ és $z_1 \geq z_3$.

1.4. Eset. $x_1 \leq x_3$ és $z_1 < z_3$. (20. ábra)

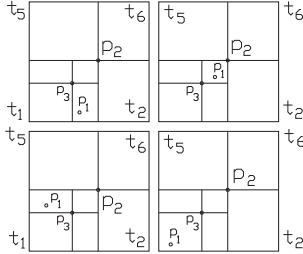
Lássuk az esetek bizonyítását!

1.1. Eset. $x_1 > x_3$ és $z_1 \leq z_3$.

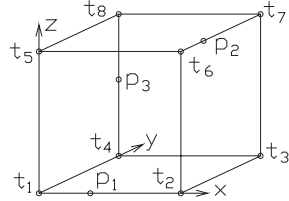
A $p_1, (p_3)$ pontot kicseréljük a $p_1, (p_3)$ pont $P_0^z, (P_0^x)$ síkra való merőleges vetületére.

A p_2 pontot kicseréljük a $t_6 t_7$ élre való merőleges vetületére. Ezen cserék közben a p_1, p_2, p_3 pontok páronkénti távolsága nem csökken. Ekkor

$$p_1 \in t_1 t_2, \quad p_2 \in t_6 t_7, \quad p_3 \in t_4 t_8 \quad (21. \text{ ábra}).$$



20. ábra.



21. ábra.

Legyen

$$\alpha := d(P_0^z, p_3).$$

Vegyük észre, hogy $\alpha \in [0, H]$. Alkalmazzuk a 4.6. Megjegyzést a p_1, p_2 pontokra (a Megjegyzés feltételei teljesülnek), és megkapjuk, hogy

$$y_2 > 2\delta.$$

Alkalmazzuk a 4.1. Megjegyzést a p_3, p_2 pontokra (a Megjegyzés feltételei teljesülnek), és kapjuk, hogy

$$y_2 < H + \delta - \alpha.$$

Így $2\delta < H + \delta - \alpha$, azaz $\alpha + \delta < H$. Alkalmazzuk a 4.2. Megjegyzést a p_3, p_2 pontokra (a Megjegyzés feltételei teljesülnek), és kapjuk, hogy

$$y_2 < H - \alpha.$$

Így $2\delta < H - \alpha$, azaz $\alpha + 2\delta < H$. Alkalmazzuk a 4.3. Megjegyzést a p_3, p_2 pontokra (a Megjegyzés feltételei teljesülnek), és kapjuk, hogy

$$y_2 < H - \delta - \alpha.$$

Alkalmazzuk a 4.4. Megjegyzést a p_2, p_1 pontokra (a Megjegyzés feltételei teljesülnek), és kapjuk, hogy

$$x_1 < H - 2\delta - \alpha.$$

Alkalmazzuk a 4.5. Megjegyzést a p_1, p_3 pontokra (a Megjegyzés feltételei teljesülnek), és kapjuk, hogy

$$z_3 > \alpha;$$

ellentmondás. Ezzel bebizonyítottuk az 1.1. Esetet.

1.2. Eset. $x_1 \geq x_3$ és $z_1 > z_3$.

A p_3 pontot kicseréljük a t_4 pontra. A p_2 pontot kicseréljük a t_6t_7 élre való merőleges vetületére. Legyen $p_1p'_1$ a p_1 végpontú, P_0'' síkkal párhuzamos, a p_2, p_3 pontokat tartalmazó egyenesre merőleges és az $(x_2, 0, z_2), (x_3, 0, z_3)$ pontokat tartalmazó egyenest nem metsző félegyenes. (Vegyük észre, hogy a p_1 pont nem lehet az $(x_2, 0, z_2), (x_3, 0, z_3)$ pontokat tartalmazó egyenesen.) A p_1 pontot kicseréljük a $p_1p'_1$ félegyenes és a $t_1t_2t_6t_5$ zárt töröttvonal metszetére. Ezen cserék közben a p_1, p_2, p_3 pontok páronkénti távolsága nem csökken. Ekkor

$$p_3 = t_4, \quad p_2 \in t_6t_7.$$

Alkalmazzuk a 4.6. Megjegyzést a p_3, p_2 pontokra (a Megjegyzés feltételei teljesülnek), és kapjuk, hogy

$$y_2 < H - \delta,$$

így a p_1 pont a $t_2t_1t_5$ töröttvonalon fekszik.

Ha $p_1 \in t_1t_2$, akkor a bizonyítása és az 1.1. Eset bizonyítása megegyeznek.

Ha $p_1 \in t_1t_5$, akkor a bizonyítása és az 1.1. Eset bizonyítása hasonló. Ezzel bebizonyítottuk az 1.2. Esetet.

1.3. Eset. $x_1 < x_3$ és $z_1 \geq z_3$.

A bizonyítás hasonló az 1.1. Eset bizonyításához.

1.4. Eset. $x_1 \leq x_3$ és $z_1 < z_3$.

A bizonyítás hasonló az 1.2. Eset bizonyításához. Ezzel bebizonyítottuk az 1. Esetet.

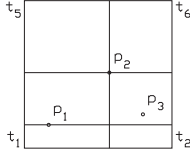
2. Eset

$(x_1 \leq x_2, x_3 > x_2, z_1 < z_2, z_3 \leq z_2)$, vagy $(x_1 > x_2, x_3 \leq x_2, z_1 \leq z_2, z_3 < z_2)$, vagy $(x_1 > x_2, x_3 \geq x_2, z_1 \leq z_2, z_3 > z_2)$, vagy $(x_1 \geq x_2, x_3 > x_2, z_1 > z_2, z_3 \leq z_2)$, vagy $(x_1 \geq x_2, x_3 < x_2, z_1 > z_2, z_3 \geq z_2)$, vagy $(x_1 < x_2, x_3 \geq x_2, z_1 \geq z_2, z_3 > z_2)$, vagy $(x_1 < x_2, x_3 \leq x_2, z_1 \geq z_2, z_3 < z_2)$, vagy $(x_1 \leq x_2, x_3 < x_2, z_1 < z_2, z_3 \geq z_2)$.

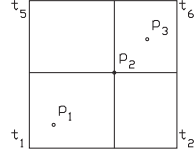
Feltesszük, hogy $x_1 \leq x_2, x_3 > x_2, z_1 < z_2, z_3 \leq z_2$. (A maradék hét eset bizonyítása

hasonló.)

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $z_1 \leq z_3$ (az ellenkező eset bizonyítása hasonló) (22. ábra). Ekkor a p_1 pontot kicseréljük a t_1 pontra. A $p_2, (p_3)$



22. ábra.



23. ábra.

pontot kicseréljük a $P_{\bar{H}}^z, (P_{\bar{H}-\delta}^z)$ síkra való merőleges vetületére. Legyen $p_2p'_2$ a p_2 végpontú, P_0^z síkkal párhuzamos, a p_1, p_3 pontokat tartalmazó egyenesre merőleges és az $(x_1, y_1, H), (x_3, y_3, H)$ pontokat tartalmazó egyenest nem metsző félegyenes. (Vegyük észre, hogy a p_2 pont nem lehet az $(x_1, y_1, H), (x_3, y_3, H)$ pontokat tartalmazó egyenesen.) A p_2 pontot kicseréljük a $p_2p'_2$ félegyenes és a $t_5t_6t_7t_8$ töröttvonal metszetére. Ezen cserék közben a p_1, p_2, p_3 pontok páronkénti távolsága nem csökken. Ekkor

$$p_1 = t_1, \quad p_3 \in t_3t_7, \quad p_2 \in t_5t_6t_7t_8.$$

Vegyük észre, hogy $p_2 \notin t_7t_8$ és $p_2 \notin t_5t_6$, így

$$p_2 \in t_5t_8 \text{ vagy } p_2 \in t_6t_7.$$

Ha $p_2 \in t_5t_8$, akkor a bizonyítása és az 1.1. Eset bizonyítása hasonló.

Ha $p_2 \in t_6t_7$, akkor alkalmazzuk a 4.6. Megjegyzést a p_1, p_2 pontokra (a Megjegyzés feltételei teljesülnek), és kapjuk, hogy

$$y_2 > 2\delta.$$

Ekkor

$$d(p_2, p_3) < 1;$$

ellentmondás. Ezzel bebizonyítottuk a 2. Esetet.

3. Eset.

$(x_1 \leq x_2, x_3 \geq x_2, z_1 < z_2, z_3 > z_2)$, vagy $(x_1 \geq x_2, x_3 \leq x_2, z_1 > z_2, z_3 < z_2)$, vagy

$(x_1 > x_2, x_3 < x_2, z_1 \leq z_2, z_3 \geq z_2)$, vagy $(x_1 < x_2, x_3 > x_2, z_1 \geq z_2, z_3 \leq z_2)$.

Feltesszük, hogy $x_1 \leq x_2, x_3 \geq x_2, z_1 < z_2, z_3 > z_2$ (23. ábra). (A maradék három eset bizonyítása hasonló.)

Ekkor a p_1, p_3 pontokat kicseréljük rendre a t_1, t_7 pontokra. Ezen cserék közben a p_1, p_2, p_3 pontok páronkénti távolsága nem csökken. Tekintsük a következő tartományokat!

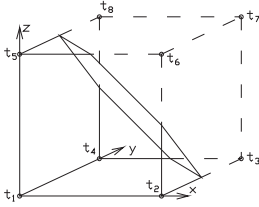
$U_1 := \text{conv}(t_1, t_2, t_4, t_5, t_{23}, t_{26}, t_{56}, t_{58}, t_{48}, t_{34})$ (24. ábra) és

$U_2 := \text{conv}(t_7, t_3, t_6, t_8, t_{23}, t_{26}, t_{56}, t_{58}, t_{48}, t_{34})$ (25. ábra).

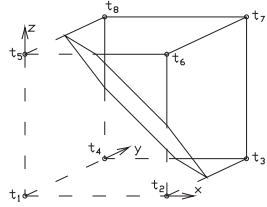
Mivel

$$U_1 \subset \text{int } B(t_1, 1), \quad U_2 \subset \text{int } B(t_7, 1)$$

és



24. ábra. U_1



25. ábra. U_2

$$T = U_1 \cup U_2,$$

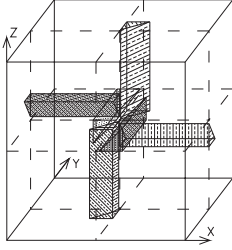
így a p_2 pont nem lehet a T téglatestben; ellentmondás. Ezzel bebizonyítottuk a 3.

Esetet és a 4.2. Lemmát \square

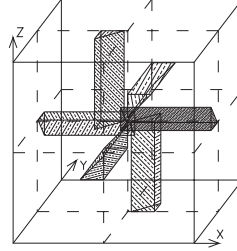
Legyen

$$\begin{aligned} G_{11} &:= H_{H-0.21-y}^+ \cap H_{y-x+2\epsilon}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^1, G_{51} := H_{H+0.21-2\epsilon-z}^+ \cap H_{z+y-\sqrt{2}}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^5, \\ G_{61} &:= H_{H+0.21-2\epsilon-x}^+ \cap H_{z-x+2\epsilon}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^6, G_{71} := H_{H+0.21-2\epsilon-y}^+ \cap H_{y-x-2\epsilon}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^7, \\ G_{31} &:= H_{H-0.21-z}^+ \cap H_{z+y-\sqrt{2}+4\epsilon}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^3, G_{41} := H_{H-0.21-x}^+ \cap H_{z-x-2\epsilon}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^4, \\ G^1 &:= G_{11} \cup G_{51} \cup G_{61} \cup G_{71} \cup G_{31} \cup G_{41} \quad (26. \text{ ábra}), \\ G_{12} &:= H_{H-0.21-z}^+ \cap H_{z-x+2\epsilon}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^1, G_{42} := H_{H+0.21-2\epsilon-y}^+ \cap H_{z+y-\sqrt{2}}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^4, \\ G_{32} &:= H_{H+0.21-2\epsilon-x}^+ \cap H_{y-x+2\epsilon}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^3, G_{72} := H_{H+0.21-2\epsilon-z}^+ \cap H_{z-x-2\epsilon}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^7, \end{aligned}$$

$$G_{62} := H_{H-0.21-y}^+ \cap H_{z+y-\sqrt{2}+4\epsilon}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^6, \quad G_{52} := H_{H-0.21-x}^+ \cap H_{y-x-2\epsilon}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^5,$$



26. ábra. G^1



27. ábra. G^2

$$G^2 := G_{12} \cup G_{42} \cup G_{32} \cup G_{72} \cup G_{62} \cup G_{52} \text{ (27. ábra).}$$

4.3. Lemma. *Ha $\text{card}((\mathbb{K}_\epsilon^1 \cup \mathbb{K}_\epsilon^5) \cap \mathfrak{F}) = 4$ és $\mathfrak{F} \cap G_{51} \neq \emptyset$, akkor*

$$\mathfrak{F} \cap P_{H-0.21,h}^z \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 = \emptyset.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{K}_\epsilon^5 \cap \mathfrak{F} = \{p_{51}, p_{52}\}$, $\mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} = \{p_{11}, p_{12}\}$ és $p_{51} \in G_{51}$. A p_{ij} pont koordinátái legyenek (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) .

Indirekt bizonyítunk. Feltesszük, hogy $\mathfrak{F} \cap P_{H-0.21,h}^z \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \neq \emptyset$. Legyen

$$V_{11} := \text{conv}((h, 0, H - 0.21), (h, 0.139, H - 0.21), (h, 0.032, h), (h, 0, h), (h - 0.032, 0, h), (h - 0.139, 0, H - 0.21)),$$

$$V_{12} := \text{conv}((0, 0, H - 0.21), (0.139, 0, H - 0.21), (0.032, 0, h), (0, 0, h), (0, 0.032, h), (0, 0.139, H - 0.21)),$$

$$V_{51} := \text{conv}((0, h, h + 0.21 - \epsilon), (0.139, h, h + 0.21 - \epsilon), (0.032, h, h), (0, h, h), (0, h - 0.032, h), (0, h - 0.139, h + 0.21 - \epsilon)),$$

$$V_{52} := \text{conv}((h, h, h + 0.21 - \epsilon), (h - 0.139, h, h + 0.21 - \epsilon), (h - 0.032, h, h), (h, h, h), (h, h - 0.032, h), (h, h - 0.139, h + 0.21 - \epsilon)) \text{ (28. ábra, 29. ábra).}$$

Legyen $p_{11} \in \mathfrak{F} \cap P_{H-0.21,h}^z \cap \mathbb{K}_\epsilon^1$. A p_{11}, p_{51} pontok a $P_{H-0.21,h+0.21-\epsilon}^z$ sávban a következőképpen helyezkedhetnek el:

1. Eset. $p_{11} \in V_{11}$ és $p_{51} \in V_{51} \cap G_{51}$ (28. ábra).

2. Eset. $p_{11} \in V_{12}$ és $p_{51} \in V_{52} \cap G_{51}$ (29. ábra).

Lássuk az esetek bizonyítását!

1. Eset. $p_{11} \in V_{11}$ és $p_{51} \in V_{51} \cap G_{51}$.

Vegyük észre, hogy $z_{12} < z_{11}$ és $z_{52} > z_{51}$. Ekkor a $p_{12}, (p_{52})$ pontot kicseréljük a $P_0^z, (P_{2h}^z)$ síkra való merőleges vetületére. Ezen cserék közben a $p_{11}, p_{12}, p_{51}, p_{52}$ pontok páronkénti távolsága nem csökken. Ekkor

$$z_{12} = 0, \quad z_{52} = 2h.$$

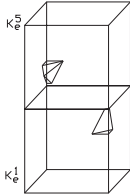
Legyen $d_1 = 0.367$, $d_2 = 0.11$, $d_3 = 0.337$, $d_4 = 0.0008$. Tekintsük a következő tartományokat!

$$T_{11} := \text{conv}((0, H, 0), (0, H - d_1, 0), (d_2, H - d_3, 0), (d_3, H - d_2, 0), (d_1, H, 0)),$$

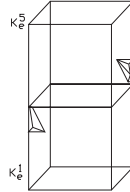
$$T_{12} := \text{conv}((H, 0, 0), (d_4, 0, 0), (d_2, H - d_3, 0), (d_3, H - d_2, 0), (H, H - d_4, 0)),$$

$$T_{51} := \text{conv}((H, 0, \sqrt{2}), (H - d_1, 0, \sqrt{2}), (H - d_3, d_2, \sqrt{2}), (H - d_2, d_3, \sqrt{2}), (H, d_1, \sqrt{2})),$$

és



28. ábra. $V_{11} \cup (V_{51} \cap G_{51})$



29. ábra. $V_{12} \cup (V_{52} \cap G_{51})$

$$T_{52} := \text{conv}((0, H, \sqrt{2}), (0, d_4, \sqrt{2}), (H - d_3, d_2, \sqrt{2}), (H - d_2, d_3, \sqrt{2}), (H - d_4, H, \sqrt{2}))$$

(30. ábra, 31. ábra).

Legyen $T_{11}, T_{12}, T_{51}, T_{52}$ homotetikus képe rendre $T_{11}^\epsilon, T_{12}^\epsilon, T_{51}^\epsilon, T_{52}^\epsilon$, ahol a homotécia aránya $\frac{h}{H}$ és a középpontja a_1 . Mivel

– ha $x \in V_{51} \cap G_{51}$, akkor $d(x, T_{11}^\epsilon) < 1$ és $d(x, T_{52}^\epsilon) < 1$

– ha $x \in V_{11}$, akkor $d(x, T_{12}^\epsilon) < 1$ és $d(x, T_{51}^\epsilon) < 1$;

így

$$p_{12} \notin T_{11}^\epsilon \cup T_{12}^\epsilon \text{ és } p_{52} \notin T_{51}^\epsilon \cup T_{52}^\epsilon.$$

Tekintsük a következő tartományokat!

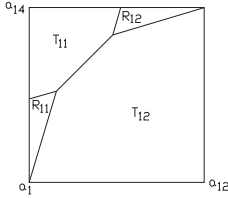
$$R_{11} := \text{conv}((0, 0, 0), (d_4, 0, 0), (d_2, H - d_3, 0), (0, H - d_1, 0)),$$

$$R_{12} := \text{conv}((H, H, 0), (d_1, H, 0), (d_3, H - d_2, 0), (H, H - d_4, 0)) \quad (30. \text{ ábra}),$$

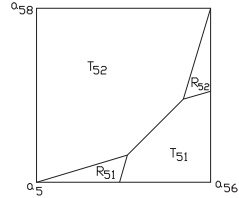
$$R_{51} := \text{conv}((0, 0, \sqrt{2}), (H - d_1, 0, \sqrt{2}), (H - d_3, d_2, \sqrt{2}), (0, d_4, \sqrt{2})),$$

$$R_{52} := \text{conv}((H, H, \sqrt{2}), (H - d_4, H, \sqrt{2}), (H - d_2, d_3, \sqrt{2}), (H, d_1, \sqrt{2})) \quad (31. \text{ ábra}).$$

Legyen $R_{11}, R_{12}, R_{51}, R_{52}$ homotetikus képe rendre $R_{11}^\epsilon, R_{12}^\epsilon, R_{51}^\epsilon, R_{52}^\epsilon$, ahol a homotécia



30. ábra.



31. ábra.

aránya $\frac{h}{H}$ és középpontja a_1 . Négy esetet különböztetünk meg:

1.1. Eset. $p_{12} \in R_{11}^\epsilon$ és $p_{52} \in R_{51}^\epsilon$.

1.2. Eset. $p_{12} \in R_{11}^\epsilon$ és $p_{52} \in R_{52}^\epsilon$.

1.3. Eset. $p_{12} \in R_{12}^\epsilon$ és $p_{52} \in R_{51}^\epsilon$.

1.4. Eset. $p_{12} \in R_{12}^\epsilon$ és $p_{52} \in R_{52}^\epsilon$.

Lássuk az esetek bizonyítását!

1.1. Eset. $p_{12} \in R_{11}^\epsilon$ és $p_{52} \in R_{51}^\epsilon$.

A $p_{11}, (p_{51})$ pontot kicseréljük a $P_h^x, (P_h^y)$ síkra való merőleges vetületére. Ezen cserék közben a $p_{11}, p_{12}, p_{51}, p_{52}$ pontok páronkénti távolsága nem csökken. Legyen $p_{12}p'_{12}$ a p_{12} végpontú, P_0^z síkkal párhuzamos, a p_{11}, p_{51} pontokat tartalmazó egyenesre merőleges és a P_h^x síkot nem metsző félegyenes. (Vegyük észre, hogy a $p_{12}p'_{12}$ félegyenes és az $(x_{11}, y_{11}, 0), (x_{51}, y_{51}, 0)$ pontokat tartalmazó egyenes duszjunkt.) A p_{12} pontot kicseréljük a $p_{12}p'_{12}$ félegyenes és az $a_{12}a_1a_{14}$ töröttvonal metszéspontjára (ez a metszéspont létezik). Legyen $p_{52}p'_{52}$ a p_{52} végpontú, P_0^z síkkal párhuzamos, a p_{11}, p_{51} pontokat tartalmazó egyenesre merőleges és a P_h^x síkot nem metsző félegyenes. (Vegyük észre, hogy a $p_{52}p'_{52}$ félegyenes és az $(x_{11}, y_{11}, 2h), (x_{51}, y_{51}, 2h)$ pontokat tartalmazó egyenes

duszjunkt.) A p_{52} pontot kicseréljük a $p_{52}p'_{52}$ félegyenes és az $a_{56}a_5a_{58}$ töröttvonal metszetére (ez a metszéspont létezik). Ezen cserék közben a $p_{11}, p_{12}, p_{51}, p_{52}$ pontok páronkénti távolsága nem kisebb, mint 1. Ekkor

$$x_{11} = h, \quad y_{51} = h, \quad (p_{12} \in a_1a_{12} \text{ vagy } p_{12} \in a_1a_{14}), \quad (p_{52} \in a_5a_{56} \text{ vagy } p_{52} \in a_5a_{58}).$$

Mivel $y_{11} \neq y_{12}$ és $x_{51} \neq x_{52}$, ezért négy esetet különböztetünk meg:

1.1.1. Eset. $y_{11} > y_{12}$ és $x_{51} > x_{52}$.

1.1.2. Eset. $y_{11} > y_{12}$ és $x_{51} < x_{52}$.

1.1.3. Eset. $y_{11} < y_{12}$ és $x_{51} > x_{52}$.

1.1.4. Eset. $y_{11} < y_{12}$ és $x_{51} < x_{52}$.

Lássuk az esetek bizonyítását!

1.1.1. Eset. $y_{11} > y_{12}$ és $x_{51} > x_{52}$.

Azt mutatjuk meg, hogy a p_{11}, p_{51} pontoknak nincs elég helye. A $p_{12}, (p_{52})$ pontot kicseréljük a $P_0^y, (P_0^x)$ síkra való merőleges vetületére. Ezen cserék közben a $p_{11}, p_{12}, p_{51}, p_{52}$ pontok páronkénti távolsága nem csökken. A p_{11} pontot kicseréljük a p_{11} ponton átmenő, a_1a_5 éllel párhuzamos egyenes és a $bd B^3(a_{12}, h)$ metszéspontjára, amelyik metszéspont harmadik koordinátája nagyobb. A p_{51} pontot kicseréljük a p_{51} ponton átmenő, a_1a_5 , éllel párhuzamos egyenes és a $bd B^3(a_{58}, h)$ metszéspontjára, amelyik metszéspont harmadik koordinátája kisebb (32. ábra). Ezen cserék közben a p_{11}, p_{51} pontok távolsága nem csökken és ezek a pontok rendre a $V_{11}, V_{51} \cap G_{11}$ tartományban helyezkednek el. Ekkor

$$x_{11} = h, \quad d(a_{12}, p_{11}) = h, \quad y_{51} = h, \quad d(a_{58}, p_{51}) = h.$$

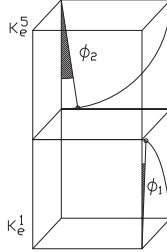
Használjuk a következő jelöléseket $\phi_1 := a_{1256}a_{12}p_{11} \angle$, $\phi_2 := a_{1458}a_{58}p_{51} \angle$ (32. ábra). Vegyük észre, hogy $0 < \phi_1 < \arctan \frac{0.139}{h} < \arctan \frac{0.139}{H-0.13} = 0.236 \dots = 11.12 \dots^\circ$ és $0 < \phi_2 < \arctan \frac{0.139}{H-0.13} = 0.236 \dots$. Alkalmazzuk a 4.9. Megjegyzést a p_{11}, p_{51} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek):

$$d^2(p_{11}, p_{51}) = (h - h \sin \phi_1)^2 + (h - h \sin \phi_2)^2 + (2h - h \cos \phi_1 - h \cos \phi_2)^2 = h^2 ((1 - \sin \phi_1)^2 + (1 - \sin \phi_2)^2 + (2 - \cos \phi_1 - \cos \phi_2)^2) < 1,$$

Ezzel beláttuk az 1.1.1. Esetet.

1.1.2. Eset. $y_{11} > y_{12}$ és $x_{51} < x_{52}$.

Úgy, mint az 1.1.1. Esetben a p_{11} pontot kicseréljük a p_{11} ponton átmenő, a_1a_5 éllel



32. ábra.

párhuzamos egyenes és a $bd B^3(a_{12}, h)$ metszéspontjára, amelyik metszéspont harmadik koordinátája nagyobb. A p_{51} pontot kicseréljük a P_0^x síkra való merőleges vetületére. Ezen cserék közben a p_{11}, p_{51}, p_{52} pontok páronkénti távolsága nem csökken. Vegyük észre, hogy a p_{52} pont nem lehet az $a_5 a_{58}$ élen, így

$$x_{11} = h, \quad d(a_{12}, p_{11}) = h, \quad p_{51} \in a_{58} a_{1458}, \quad p_{52} \in a_5 a_{56}.$$

Úgy, mint az 1.1.1 Esetben $\phi_1 \in (0, 0.24)$. Alkalmazzuk a 4.10. Megjegyzést a p_{11}, p_{51} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk

$$z_{51} > h + h \sin \phi_1.$$

Vegyük észre $0 < h \sin \phi_1 < H \sin 0.24 = 0.16 \dots < 0.24$. Alkalmazzuk a 4.6. Megjegyzést a p_{51}, p_{52} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk

$$x_{52} > 2h \sin \phi_1.$$

Alkalmazzuk a 4.11. Megjegyzést a p_{11}, p_{52} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk

$$d^2(p_{11}, p_{52}) < (h - 2h \sin \phi_1)^2 + (2h - h \cos \phi_1)^2 + h^2 \sin^2 \phi_1 =$$

$$h^2 ((1 - 2 \sin \phi_1)^2 + (2 - \cos \phi_1)^2 + \sin^2 \phi_1) < 1;$$

ellentmondás. Ezzel beláttuk az 1.1.2. Esetet.

1.1.3. Eset. $y_{11} < y_{12}$ és $x_{51} > x_{52}$.

A bizonyítás hasonló az 1.1.2. Eset bizonyításához (Felcseréljük a p_{11}, p_{51} és p_{12}, p_{52} pontokat.)

1.1.4. Eset. $y_{11} < y_{12}$ és $x_{51} < x_{52}$.

A $p_{11}, (p_{51})$ pontot kicseréljük a $P_0^y, (P_0^x)$ síkra való merőleges vetületére. Ezen cserék közben a $p_{11}, p_{12}, p_{51}, p_{52}$ pontok páronkénti távolsága nem csökken. Vegyük észre, hogy a p_{12}, p_{52} pontok rendre nem lehetnek az $a_1 a_{12}, a_5 a_{58}$ éleken, így

$$p_{11} \in a_{12} a_{1256}, \quad p_{12} \in a_1 a_{14}, \quad p_{51} \in a_{58} a_{1458}, \quad p_{52} \in a_5 a_{56}.$$

Használjuk a következő jelöléseket $\delta_1 := d(P_h^z, p_{11})$. Alkalmazzuk a 4.6. Megjegyzést a p_{11}, p_{12} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk $y_{12} > 2\delta_1$. Alkalmazzuk a 4.7. Megjegyzést a p_{12}, p_{51} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk $z_{51} > h + \delta_1$. Alkalmazzuk a 4.6. Megjegyzést a p_{51}, p_{52} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk $x_{52} > 2\delta_1$. Alkalmazzuk a 4.7. Megjegyzést a p_{52}, p_{11} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk $z_{11} < h - \delta_1$; ellentmondás. Ezzel beláttuk az 1.1.4. Esetet és az 1.1. Esetet.

1.2. Eset. $p_{12} \in R_{11}^\epsilon$ és $p_{52} \in R_{52}^\epsilon$.

Legyen $p_{12}p'_{12}$ a p_{12} kezdőpontú, P_0^z síkkal párhuzamos, p_{11}, p_{51} pontokat tartalmazó egyenesre merőleges és a P_h^x síkot nem metsző félegyenes. (Vegyük észre, hogy a $p_{12}p'_{12}$ félegyenes és az $(x_{11}, y_{11}, 0), (x_{51}, y_{51}, 0)$ pontokat tartalmazó egyenes diszjunkt.) A p_{12} pontot kicseréljük a $p_{12}p'_{12}$ félegyenes és az $a_{12}a_1a_{14}$ töröttvonal metszéspontjára (ez a metszéspont létezik). Legyen $p_{52}p'_{52}$ a p_{52} kezdőpontú, P_0^z síkkal párhuzamos, p_{11}, p_{51} pontokat tartalmazó egyenesre merőleges és a P_0^x síkot nem metsző félegyenes. (Vegyük észre, hogy a $p_{52}p'_{52}$ félegyenes és az $(x_{11}, y_{11}, 2h), (x_{51}, y_{51}, 2h)$ pontokat tartalmazó egyenes diszjunkt.) A p_{52} pontot kicseréljük a $p_{52}p'_{52}$ félegyenes és az $a_{56}a_{5678}a_{58}$ töröttvonal metszéspontjára (ez a metszéspont létezik). Legyen $p_{11}p'_{11}$ a p_{11} kezdőpontú, P_0^z síkkal párhuzamos, p_{12}, p_{52} pontokat tartalmazó egyenesre merőleges és a P_0^x síkot nem metsző félegyenes. (Vegyük észre, hogy a $p_{11}p'_{11}$ félegyenes és az (x_{12}, y_{12}, z_{11}) és (x_{52}, y_{52}, z_{11}) pontokat tartalmazó egyenes diszjunkt.) A p_{11} pontot kicseréljük a $p_{11}p'_{11}$ félegyenes és a \mathbb{K}_ϵ^1 kocka felszínének metszéspontjára. Legyen $p_{51}p'_{51}$ a p_{51}

kezdőpontú, P_0^z síkkal párhuzamos, a p_{12}, p_{52} pontokat tartalmazó egyenesre merőleges és a P_h^x síkot nem metsző félegyenes. (Vegyük észre, hogy a $p_{51}p'_{51}$ félegyenes és az $(x_{12}, y_{12}, z_{51}), (x_{52}, y_{52}, z_{51})$ pontokat tartalmazó egyenes diszjunkt.) A p_{51} pontot kicseréljük a $p_{51}p'_{51}$ félegyenes és a \mathbb{K}_ϵ^5 kocka felszínének metszéspontjára. Ezen cserék közben a $p_{11}, p_{12}, p_{51}, p_{52}$ pontok páronkénti távolsága nem csökken. Ekkor

$$(p_{11} \in P_h^x \text{ vagy } p_{11} \in P_0^y), \quad (p_{51} \in P_0^x \text{ vagy } p_{51} \in P_h^y),$$

$$(p_{12} \in a_1a_{12} \text{ vagy } p_{12} \in a_1a_{14}), \quad (p_{52} \in a_{56}a_{5678} \text{ vagy } p_{52} \in a_{58}a_{5678}).$$

Két esetet különböztetünk meg:

1.2.1. *Eset.* $p_{12} \in a_1a_{12}$.

1.2.2. *Eset.* $p_{12} \in a_1a_{14} \setminus \{a_1\}$.

Lássuk az esetek bizonyítását!

1.2.1. *Eset.* $p_{12} \in a_1a_{12}$.

Ekkor $p_{11} \notin P_0^y$ és $p_{11} \notin P_h^x \cap B(a_{12}, h) \cap V_{11}$. Használjuk a következő jelöléseket:

$i_{11}(h, 0, h)$, $i_{21}(h, 0.139, h)$, $i_{31}(h, 0.139, \sqrt{h^2 - 0.139^2})$ és $I_1 := \text{conv}(i_{11}, i_{21}, i_{31})$. Mivel $(P_h^x \cap V_{11}) \setminus B(a_{12}, h) \subset I_1$, így $p_{11} \in I_1$. Ekkor

$$d(a_{5678}, p_{11}) \leq \max_{x \in I_1} d(a_{5678}, x) = \max(d(a_{5678}, i_{11}), d(a_{5678}, i_{21}), d(a_{5678}, i_{31})).$$

A $d(a_{5678}, i_{11}) < 1, d(a_{5678}, i_{21}) < 1$ egyenlőtlenségek nyilvánvalóak és a $d(a_{5678}, i_{31}) < 1$ egyenlőtlenség a 4.12. Megjegyzésből következik (a Megjegyzés feltételei teljesülnek), így $p_{52} \notin P_h^x$, tehát $p_{52} \in a_{58}a_{5678}$.

Használjuk a következő jelöléseket: $i_{12}(0, h, h)$, $i_{22}(0, h - 0.139, h)$, $i_{32}(0, h - 0.139, 2h - \sqrt{h^2 - 0.139^2})$ és $I_2 := \text{conv}(i_{12}, i_{22}, i_{32})$. Hasonlóan, mint korábban $p_{51} \in I_2$. Vegyük észre, hogy

$$\text{diam}(I_1 \cup I_2) < 1;$$

ellentmondás. Ezzel beláttuk az 1.2.1. Esetet.

1.2.2. *Eset.* $p_{12} \in a_1a_{14} \setminus \{a_1\}$.

Ha $y_{12} < y_{11}$, akkor a p_{12} pontot kicseréljük a P_0^y síkra való merőleges vetületére. Ezen cserék közben a $p_{11}, p_{12}, p_{51}, p_{52}$ pontok páronkénti távolsága nem csökken. Így

$p_{12} \in a_1a_{12}$, amit már tárgyaltunk az 1.2.1. Esetben.

Feltehetjük, hogy $y_{12} > y_{11}$ (az egyenlőség nem teljesülhet).

A p_{11} pontot kicseréljük a P_0^y síkra való merőleges vetületére. Legyen q a $\text{bd } B^3(p_{52}, 1) \cap \text{bd } B^3(p_{12}, 1) \cap P_0^y$ pontok közül az, amelyik metszéspont harmadik koordinátája kisebb.

Legyen $qq_1, (qq_2)$ a q kezdőpontú, P_0^y síkkal párhuzamos, a $B^3(p_{52}, 1), (B^3(p_{12}, 1))$ gömböt nem metsző és a $B^3(p_{12}, 1), (B^3(p_{52}, 1))$ gömböt érintő félegyenes.

Ha $x_{11} < h$ és $q \neq p_{11}$, akkor a p_{11} pontot kicseréljük a q kezdőpontú, p_{11} pontot tartalmazó félegyenes és az $a_{12}a_{1256}$ él metszéspontjára (ez a metszéspont létezik).

Ha $x_{11} < h$ és $q = p_{11}$, akkor a p_{11} pontot kicseréljük a q kezdőpontú, $q_1qq_2 \angle$ szögtartományban elhelyezkedő egyik félegyenes és az $a_{12}a_{1256}$ él metszetére (ez a metszéspont létezik). Ezen cserék közben a $p_{11}, p_{12}, p_{51}, p_{52}$ pontok páronkénti távolsága nem csökken. Ekkor $p_{11} \in a_{12}a_{1256}$.

Hasonlóan, mint korábban $p_{51} \in a_{58}a_{1458}$, különben $p_{52} \in a_{58}a_{5678}$, aminek a bizonyítása hasonló az 1.2.1. Eset bizonyításához. Így

$$p_{11} \in a_{12}a_{1256}, \quad p_{12} \in a_1a_{14}, \quad p_{51} \in a_{58}a_{1458}, \quad p_{52} \in a_{56}a_{5678}.$$

Használjuk a következő jelölést: $\delta_2 := d(P_h^z, p_{11})$. Alkalmazzuk a 4.6. Megjegyzést a p_{11}, p_{12} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk $y_{12} > 2\delta_2$. Alkalmazzuk a 4.7. Megjegyzést a p_{12}, p_{51} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk $z_{51} > h + \delta_2$. Alkalmazzuk a 4.6. Megjegyzést a p_{51}, p_{52} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk $y_{52} < h - 2\delta_2$. Alkalmazzuk a 4.7. Megjegyzést a p_{52}, p_{11} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk $z_{11} < h - \delta_2$; ellentmondás. Ezzel beláttuk az 1.2.2. Esetet.

1.3. Eset. $p_{12} \in R_{12}^\epsilon$ és $p_{52} \in R_{51}^\epsilon$.

A bizonyítás hasonló az 1.2. Eset bizonyításához.

1.4. Eset. $p_{12} \in R_{12}^\epsilon$ és $p_{52} \in R_{52}^\epsilon$.

A bizonyítás hasonló az 1.1. Eset bizonyításához.

2. Eset. $p_{11} \in V_{12}$ és $p_{51} \in V_{52} \cap G_{11}$.

A bizonyítás hasonló az 1. Eset bizonyításához. Ezzel beláttuk a Lema állítását. \square

4.1. Következmény. A 4.3. Lemmából következik:

- Ha $\text{card}((\mathbb{K}_\epsilon^1 \cup \mathbb{K}_\epsilon^4) \cap \mathfrak{F}) = 4$ és $\mathfrak{F} \cap G_{11} \neq \emptyset$, akkor $\mathfrak{F} \cap P_{h,h+0.21-\epsilon}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^4 = \emptyset$.
Ha $\text{card}((\mathbb{K}_\epsilon^4 \cup \mathbb{K}_\epsilon^3) \cap \mathfrak{F}) = 4$ és $\mathfrak{F} \cap G_{41} \neq \emptyset$, akkor $\mathfrak{F} \cap P_{h,h+0.21-\epsilon}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^3 = \emptyset$.
Ha $\text{card}((\mathbb{K}_\epsilon^3 \cup \mathbb{K}_\epsilon^7) \cap \mathfrak{F}) = 4$ és $\mathfrak{F} \cap G_{31} \neq \emptyset$, akkor $\mathfrak{F} \cap P_{h,h+0.21-\epsilon}^z \cap \mathbb{K}_\epsilon^7 = \emptyset$.
Ha $\text{card}((\mathbb{K}_\epsilon^7 \cup \mathbb{K}_\epsilon^6) \cap \mathfrak{F}) = 4$ és $\mathfrak{F} \cap G_{71} \neq \emptyset$, akkor $\mathfrak{F} \cap P_{H-0.21,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^6 = \emptyset$.
Ha $\text{card}((\mathbb{K}_\epsilon^6 \cup \mathbb{K}_\epsilon^5) \cap \mathfrak{F}) = 4$ és $\mathfrak{F} \cap G_{61} \neq \emptyset$, akkor $\mathfrak{F} \cap P_{H-0.21,h}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^5 = \emptyset$.
Ha $\text{card}((\mathbb{K}_\epsilon^5 \cup \mathbb{K}_\epsilon^6) \cap \mathfrak{F}) = 4$ és $\mathfrak{F} \cap G_{52} \neq \emptyset$, akkor $\mathfrak{F} \cap P_{h,h+0.21-\epsilon}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^6 = \emptyset$.
Ha $\text{card}((\mathbb{K}_\epsilon^6 \cup \mathbb{K}_\epsilon^7) \cap \mathfrak{F}) = 4$ és $\mathfrak{F} \cap G_{62} \neq \emptyset$, akkor $\mathfrak{F} \cap P_{h,h+0.21-\epsilon}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^7 = \emptyset$.
Ha $\text{card}((\mathbb{K}_\epsilon^7 \cup \mathbb{K}_\epsilon^3) \cap \mathfrak{F}) = 4$ és $\mathfrak{F} \cap G_{72} \neq \emptyset$, akkor $\mathfrak{F} \cap P_{H-0.21,h}^z \cap \mathbb{K}_\epsilon^3 = \emptyset$.
Ha $\text{card}((\mathbb{K}_\epsilon^3 \cup \mathbb{K}_\epsilon^4) \cap \mathfrak{F}) = 4$ és $\mathfrak{F} \cap G_{32} \neq \emptyset$, akkor $\mathfrak{F} \cap P_{H-0.21,h}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^4 = \emptyset$.
Ha $\text{card}((\mathbb{K}_\epsilon^4 \cup \mathbb{K}_\epsilon^1) \cap \mathfrak{F}) = 4$ és $\mathfrak{F} \cap G_{42} \neq \emptyset$, akkor $\mathfrak{F} \cap P_{H-0.21,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 = \emptyset$.
Ha $\text{card}((\mathbb{K}_\epsilon^1 \cup \mathbb{K}_\epsilon^5) \cap \mathfrak{F}) = 4$ és $\mathfrak{F} \cap G_{12} \neq \emptyset$, akkor $\mathfrak{F} \cap P_{h,h+0.21-\epsilon}^z \cap \mathbb{K}_\epsilon^5 = \emptyset$.

4.5. A Tétel bizonyítása

Emlékeztetőül a

5. Tétel. A $\sqrt{2}$ élű 3-dimenziós kocka a legkisebb kocka, amelyben elhelyezhető 14 olyan pont, amely pontok páronkénti távolsága legalább 1.

Bizonyítás. A bizonyítás vázlatja a következő.

1. Lépés. $\text{card}(\mathbb{K} \cap \mathfrak{F}) \geq 14$.
2. Lépés. $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon \cap \mathfrak{F}) \leq 16$.
3. Lépés. $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon \cap \mathfrak{F}) \leq 14$.
4. Lépés. $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon \cap \mathfrak{F}) < 14$.

1. Lépés $\text{card}(K \cap \mathfrak{F}) \geq 14$.

A \mathbb{K} kocka csúcspontjainak és lapközéppontjainak a halmaza rendelkezik az elvárt tulajdonságokkal, azaz $\text{card}(\mathfrak{F}) \geq 14$,

2. Lépés. $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon \cap \mathfrak{F}) \leq 16$.

Ha $\epsilon \geq 0.13$, akkor $\text{diam}(\mathbb{K}_\epsilon^i) < 1$, azaz $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon^i \cap \mathfrak{F}) \leq 1$ minden $i = 1, 2, \dots, 8$ esetén, azaz $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon \cap \mathfrak{F}) \leq 8$. Így feltehetjük, hogy $\epsilon \in (0, 0.13)$ egy rögzített szám.

Azt mutatjuk meg, hogy $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon^i \cap \mathfrak{F}) \leq 2$ minden $i = 1, 2, \dots, 8$ esetén. Ebből az következik, hogy $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon \cap \mathfrak{F}) \leq 16$.

Az általánosság megszorítása nélkül vizsgálhatjuk csak a \mathbb{K}_ϵ^1 kockát.

Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F}) \geq 3$. Így a \mathbb{K}_ϵ^1 kockában van egy p_1, p_2, p_3 (valódi) háromszög, amely csúcsai \mathfrak{F} halmazbeli pontok. A p_1, p_2, p_3 háromszög legnagyobb szöge legyen a $p_1 p_2 p_3 \angle$ szög, ami a legnagyobb, ha a $p_1 p_2, p_2 p_3 (\geq 1)$ oldalak a lehető legrövidebbek és a $p_1 p_3 (\leq \frac{\sqrt{6}}{2})$ a lehető leghosszabb. Így $p_1 p_2 p_3 \angle \leq 2 \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4} = 75.52 \dots^\circ$. Tehát a $p_1 p_2 p_3$ háromszög hegyesszögű. A minimális területe az olyan hegyesszögű háromszögeknek, amelyek oldalai legalább 1 hosszúak

$$\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

A 4.1. Lemmából kapjuk, hogy a p_1, p_2, p_3 pontokat kicserélhetjük a \mathbb{K}_ϵ^1 kocka csúcspontjaira, miközben a $p_1 p_2 p_3$ háromszög területe nem csökken. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a \mathbb{K}_ϵ^1 kockában az olyan háromszögek maximális területe, amely háromszögek csúcspontjai a kockának is csúcspontjai,

$$\frac{(1 - \sqrt{2}\epsilon)^2 \sqrt{3}}{4} < \frac{\sqrt{3}}{4};$$

ellentmondás. Így

$$\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F}) \leq 2,$$

azaz

$$\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon^i \cap \mathfrak{F}) \leq 2, \text{ ha } i = 1, \dots, 8;$$

azaz

$$\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon \cap \mathfrak{F}) \leq 16.$$

3. *Lépés.* $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon \cap \mathfrak{F}) \leq 14$.

Emlékeztetőül megjegyezzük, hogy a $\mathbb{K}_\epsilon^i, \mathbb{K}_\epsilon^j$ ($i \neq j$) szomszédos kockák, ha a két kockának van egy közös lapja és a $\mathbb{K}_\epsilon^i, \mathbb{K}_\epsilon^j, \mathbb{K}_\epsilon^k, \mathbb{K}_\epsilon^l$ (i, j, k, l mind különböző) szomszédos kockák, ha a négy kockának van egy közös éle. Valamint a $\mathbb{K}_\epsilon^i, \mathbb{K}_\epsilon^j$ ($i \neq j$) szembenlévő kockák, ha csak egy közös csúcuk van.

Megmutatjuk, hogy négy szomszédos kis kockában legfeljebb 7 darab \mathfrak{F} halmazbeli pont lehet, azaz $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon \cap \mathfrak{F}) \leq 14$. Az általánosság megszorítása nélkül vizsgálhatjuk csak a $\mathbb{K}_\epsilon^1, \mathbb{K}_\epsilon^2, \mathbb{K}_\epsilon^3, \mathbb{K}_\epsilon^4$ kockákat.

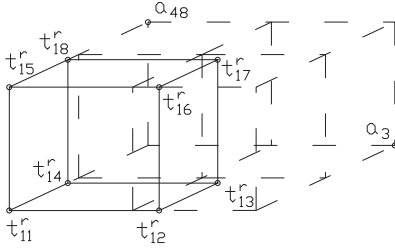
Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $\text{card}((\mathbb{K}_\epsilon^1 \cup \mathbb{K}_\epsilon^2 \cup \mathbb{K}_\epsilon^3 \cup \mathbb{K}_\epsilon^4) \cap \mathfrak{F}) \geq 8$. Ekkor

a 2. Lépés miatt $\text{card}((\mathbb{K}_\epsilon^1 \cup \mathbb{K}_\epsilon^2 \cup \mathbb{K}_\epsilon^3 \cup \mathbb{K}_\epsilon^4) \cap \mathfrak{F}) = 8$ és $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon^i \cap \mathfrak{F}) = 2$ minden $i = 1, 2, 3, 4$ esetén. Tekintsük a következő tartományokat!

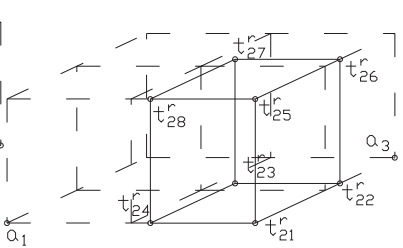
$$T_1^\tau := H_x^+ \cap H_y^+ \cap H_{H+(2\tau-1)\epsilon-x}^+ \cap H_{H-(2\tau-1)\epsilon-y}^- \cap (\mathbb{K}_\epsilon^1 \cup \mathbb{K}_\epsilon^2) \quad (33. \text{ ábra}),$$

$$T_2^\tau := H_y^+ \cap H_{2h-x}^+ \cap H_{H+(2\tau-1)\epsilon-y}^+ \cap H_{H+(2\tau-1)\epsilon-x}^- \cap (\mathbb{K}_\epsilon^2 \cup \mathbb{K}_\epsilon^3) \quad (34. \text{ ábra}),$$

$$T_3^\tau := H_{2h-x}^+ \cap H_{2h-y}^+ \cap H_{H-(2\tau+1)\epsilon-x}^+ \cap H_{H+(2\tau-1)\epsilon-y}^- \cap (\mathbb{K}_\epsilon^3 \cup \mathbb{K}_\epsilon^4) \quad (35. \text{ ábra}),$$

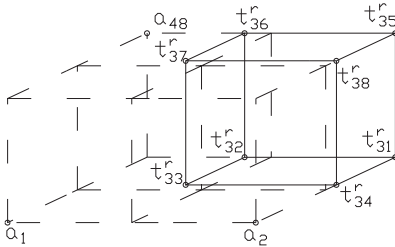


33. ábra. T_1^τ

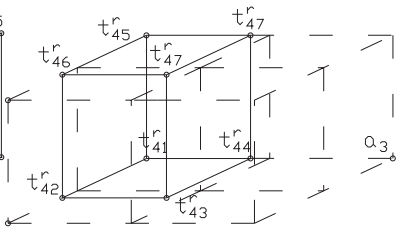


34. ábra. T_2^τ

$T_4^\tau := H_{2h-y}^+ \cap H_x^+ \cap H_{H-(2\tau+1)\epsilon-y}^+ \cap H_{H-(2\tau-1)\epsilon-x}^- \cap (\mathbb{K}_\epsilon^3 \cup \mathbb{K}_\epsilon^4)$ (36. ábra) minden $\tau \in (1, \frac{0.21-\epsilon}{2\epsilon}]$ esetén. Legyen T_i^1 a $\lim_{\tau \rightarrow 1+0} T_i^\tau$ test lezártja minden $i = 1, 2, 3, 4$ esetén.



35. ábra. T_3^τ

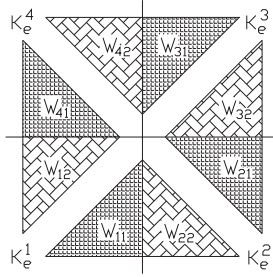


36. ábra. T_4^τ

Legyen

$$W_{11} := H_{H-0.21-y}^+ \cap H_{y-x+2\epsilon}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^1, W_{21} := H_{h+0.21-\epsilon-x}^+ \cap H_{y+x-\sqrt{2}}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^2,$$

$$W_{31} := H_{h+0.21-\epsilon-y}^+ \cap H_{y-x-2\epsilon}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^3, W_{41} := H_{H-0.21-x}^+ \cap H_{y+x-\sqrt{2}+4\epsilon}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^4,$$



37. ábra.

$W_{12} := H_{H-0.21-x}^+ \cap H_{y-x-2\epsilon}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^1$, $W_{22} := H_{H-0.21-y}^+ \cap H_{y+x-\sqrt{2}+4\epsilon}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^2$,
 $W_{32} := H_{h+0.21-\epsilon-x}^+ \cap H_{y-x+2\epsilon}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^3$, $W_{42} := H_{h+0.21-\epsilon-y}^+ \cap H_{y+x-\sqrt{2}}^- \cap \mathbb{K}_\epsilon^4$ és
 $W^1 = W_{11} \cup W_{21} \cup W_{31} \cup W_{41}$, $W^2 = W_{12} \cup W_{22} \cup W_{32} \cup W_{42}$ (a 37. ábra a W_{ij} és a P_0^z metszetét ábrázolja).

Jegyezzük meg, hogy T_i^τ és $W_{(i+1)1}$ érinti egymást minden $i = 1, 2, 3, 4$ esetén és minden $\tau \in [1, \frac{0.21-\epsilon}{2\epsilon}]$ esetén, ahol $W_{51} = W_{11}$. Két esetet különböztetünk meg:

1. Eset. $(W^1 \cup W^2) \cap \mathfrak{F} = \emptyset$.
2. Eset. $(W^1 \cup W^2) \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$.

Lássuk az esetek bizonyítását!

1. Eset. $(W^1 \cup W^2) \cap \mathfrak{F} = \emptyset$.

Egy τ szerinti indukciót alkalmazunk. Megmutatjuk, hogy $P_{h,h+0.21-\epsilon}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^2 \cap \mathfrak{F} = \emptyset$.

A 4.2. Lemma miatt

$$\text{card}(T_i^1 \cap \mathfrak{F}) \leq 2 \text{ minden } i = 1, 2, 3, 4 \text{ esetén,}$$

azaz

$$P_{h,H+\epsilon}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^2 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{h,H+\epsilon}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^3 \cap \mathfrak{F} = \emptyset,$$

$$P_{H-3\epsilon,h}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^4 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{H-3\epsilon,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} = \emptyset.$$

Ismét alkalmazzuk a 4.2. Lemmát és kapjuk

$$\text{card}(T_i^\tau \cap \mathfrak{F}) \leq 2, \text{ ha } i = 1, 2, 3, 4 \text{ és } \tau \in [1, 2].$$

Ebből és az eset feltételeiből kapjuk, hogy

$$P_{h,H+3\epsilon}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^2 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{h,H+3\epsilon}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^3 \cap \mathfrak{F} = \emptyset,$$

$$P_{H-5\epsilon,h}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^4 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{H-5\epsilon,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} = \emptyset.$$

Tegyük fel, hogy

$$P_{h,H+(2n-1)\epsilon}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^2 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{h,H+(2n-1)\epsilon}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^3 \cap \mathfrak{F} = \emptyset,$$

$$P_{H-(2n+1)\epsilon,h}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^4 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{H-(2n+1)\epsilon,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} = \emptyset,$$

ahol $n \in \mathbb{N}^+$ és $(2n+1)\epsilon \leq 0.21 - 2\epsilon$. Ismét alkalmazzuk a 4.2. Lemmát és kapjuk

$$\text{card}(T_i^\tau \cap \mathfrak{F}) \leq 2 \text{ minden } i = 1, 2, 3, 4 \text{ és } \tau \in [1, n] \text{ esetén.}$$

Ebből és az eset feltételeiből kapjuk, hogy

$$P_{h,H+(2n+1)\epsilon}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^2 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{h,H+(2n+1)\epsilon}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^3 \cap \mathfrak{F} = \emptyset,$$

$$P_{H-(2n+3)\epsilon,h}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^4 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{H-(2n+3)\epsilon,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} = \emptyset.$$

Tegyük fel, hogy

$$P_{h,H+(2n-1)\epsilon}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^2 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{h,H+(2n-1)\epsilon}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^3 \cap \mathfrak{F} = \emptyset,$$

$$P_{H-(2n+1)\epsilon,h}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^4 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{H-(2n+1)\epsilon,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} = \emptyset,$$

ahol $n \in \mathbb{N}^+$ és $0.21 - 2\epsilon < (2n+1)\epsilon \leq 0.21$. Ismét alkalmazzuk a 4.2. Lemmát és kapjuk

$$\text{card}(T_i^\tau \cap \mathfrak{F}) \leq 2 \text{ minden } i = 1, 2, 3, 4 \text{ és } \tau \in [1, \frac{0.21 - \epsilon}{2\epsilon}] \text{ esetén.}$$

Ebből és az eset feltételeiből kapjuk, hogy

$$P_{h,h+0.21-\epsilon}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^2 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{h,h+0.21-\epsilon}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^3 \cap \mathfrak{F} = \emptyset,$$

$$P_{H-0.21,h}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^4 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{H-0.21,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} = \emptyset.$$

Hasonlóan, mint korábban beláthatjuk, hogy

$$P_{h,h+0.21-\epsilon}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^4 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{h,h+0.21-\epsilon}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^3 \cap \mathfrak{F} = \emptyset,$$

$$P_{H-0.21,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^2 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{H-0.21,h}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} = \emptyset.$$

Így azt kapjuk, hogy a \mathbb{K}_ϵ^2 kockában elhelyezkedő két \mathfrak{F} halmazbeli pontnak a $(H - 0.21), (H - 0.21), h$ élű téglatestben kell elhelyezkednie, aminek az átmérője kisebb, mint 1; ellentmondás. Ezzel beláttuk az 1. Esetet.

2. *Eset.* $(W^1 \cup W^2) \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$.

Mivel $\text{diam}(\text{conv}(W^1 \cup W^2)) < 1$, így $\text{card}((W^1 \cup W^2) \cap \mathfrak{F}) = 1$.

Ha $(W^1 \cap W^2) \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$, akkor feltehetjük, hogy $W_{11} \cap W_{22} \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$ és így

$\text{card}((\mathbb{K}_\epsilon^1 \cup \mathbb{K}_\epsilon^2) \cap \mathfrak{F}) \leq 3$, azaz $\text{card}((\mathbb{K}_\epsilon^1 \cup \mathbb{K}_\epsilon^2 \cup \mathbb{K}_\epsilon^3 \cup \mathbb{K}_\epsilon^4) \cap \mathfrak{F}) \leq 7$, amit bizonyítani szerettünk volna.

Feltesszük, hogy $(W^1 \cap W^2) \cap \mathfrak{F} = \emptyset$. Ekkor feltehetjük, hogy $W_{12} \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$. Ekkor $W^1 \cap \mathfrak{F} = \emptyset$. Az 1. Esetben már beláttuk, hogy a feltételekből bővetkezik, hogy $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon^i \cap \mathfrak{F}) = 2$ minde $i = 1, 2, 3, 4$ esetén és $W^1 \cap \mathfrak{F} = \emptyset$ tényből következik, hogy $P_{H-0.21,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} = \emptyset$. De $W_{12} \subset (P_{H-0.21,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1)$; ellentmondás. Ezzel beláttuk a 2. Esetet.

Így beláttuk, hogy $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon^1 \cup \mathbb{K}_\epsilon^2 \cup \mathbb{K}_\epsilon^3 \cup \mathbb{K}_\epsilon^4) \leq 7$, azaz a \mathbb{K}_ϵ kockában legfeljebb 14 darab \mathfrak{F} halmazbeli pont lehet. A 14 pont csak úgy helyezkedhet el, hogy két szemköztes kis kockában van egy-egy pont, a többi kis kockában (amelyek egy láncot formálnak) pedig két-két pont helyezkedik el.

4. *Lépés.* $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon \cap \mathfrak{F}) < 14$.

Indirect bizonyítunk. Feltehetjük, hogy $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon^i \cap \mathfrak{F}) = 1$, ha $i = 2, 8$, és

$\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon^i \cap \mathfrak{F}) = 2$, ha $i = 1, 3, 4, 5, 6, 7$.

Használjuk a korábbi G_{ij} ($i = 1, 3, 4, 5, 6, 7; j = 1, 2$) tartományokat a 4.3. Lemmából.

Négy esetet különböztetünk meg:

1. *Eset.* $(G^1 \cup G^2) \cap \mathfrak{F} = \emptyset$.

2. *Eset.* $G^1 \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$ és $G^2 \cap \mathfrak{F} = \emptyset$.

3. *Eset.* $G^1 \cap \mathfrak{F} = \emptyset$ és $G^2 \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$.

4. Eset. $G^1 \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$ és $G^2 \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$.

Lássuk az esetek bizonyítását!

1. Eset. $(G^1 \cup G^2) \cap \mathfrak{F} = \emptyset$.

Használjuk a 3. Lépésben leírt módszert a $\mathbb{K}_\epsilon^1, \mathbb{K}_\epsilon^5, \mathbb{K}_\epsilon^6, \mathbb{K}_\epsilon^7, \mathbb{K}_\epsilon^3, \mathbb{K}_\epsilon^4$ kockákra és a $\mathbb{K}_\epsilon^1, \mathbb{K}_\epsilon^4, \mathbb{K}_\epsilon^3, \mathbb{K}_\epsilon^7, \mathbb{K}_\epsilon^6, \mathbb{K}_\epsilon^5$ kockákra.

Így kapjuk, hogy

$$P_{h,h+0.21-\epsilon}^z \cap \mathbb{K}_\epsilon^5 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{h,h+0.21-\epsilon}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^6 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{h,h+0.21-\epsilon}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^7 \cap \mathfrak{F} = \emptyset,$$

$$P_{H-0.21,h}^z \cap \mathbb{K}_\epsilon^3 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{H-0.21,h}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^4 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{H-0.21,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} = \emptyset,$$

és

$$P_{h,h+0.21-\epsilon}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^4 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{h,h+0.21-\epsilon}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^3 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{h,h+0.21-\epsilon}^z \cap \mathbb{K}_\epsilon^7 \cap \mathfrak{F} = \emptyset,$$

$$P_{H-0.21,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^6 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{H-0.21,h}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^5 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{H-0.21,h}^z \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} = \emptyset.$$

Így azt kapjuk, hogy a \mathbb{K}_ϵ^1 kockában elhelyezkedő két \mathfrak{F} halmazbeli pontnak a $(H - 0.21), (H - 0.21), h$ élű téglatestben kell elhelyezkednie, aminek az átmérője kisebb, mint 1; ellentmondás. Ezzel beláttuk az 1. Esetet.

2. Eset. $G^1 \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$ és $G^2 \cap \mathfrak{F} = \emptyset$.

Mivel $G^2 \cap \mathfrak{F} = \emptyset$, így használjuk a 3. Lépésben leírt módszert a $\mathbb{K}_\epsilon^1, \mathbb{K}_\epsilon^4, \mathbb{K}_\epsilon^3, \mathbb{K}_\epsilon^7, \mathbb{K}_\epsilon^6, \mathbb{K}_\epsilon^5$ kockákra. Ekkor kapjuk, hogy

$$P_{H-0.21,h}^z \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} = \emptyset, \quad P_{H-0.21,h}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^5 \cap \mathfrak{F} = \emptyset.$$

Mivel $\text{diam}(P_{0,H-0.21}^y \cap (\mathbb{K}_\epsilon^1 \setminus P_{H-0.21,h}^z)) < 1$, így

$$P_{H-0.21,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset.$$

Mivel $\text{diam}(P_{H-0.21,h}^y \cap (\mathbb{K}_\epsilon^1 \setminus P_{H-0.21,h}^z)) < 1$, így

$$\text{card}(P_{H-0.21,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F}) = 1.$$

Legyen p_{11} ez a pont, azaz

$$p_{11} = P_{H-0.21,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F},$$

és jelölje P_1 a P_h^y síkot.

hasonlóan

$$\begin{aligned} p_{41} &:= P_{H-0.21,h}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^4 \cap \mathfrak{F}, \quad P_4 := P_h^x, \quad p_{31} := P_{H-0.21,h}^z \cap \mathbb{K}_\epsilon^3 \cap \mathfrak{F}, \quad P_3 := P_h^z, \\ p_{71} &:= P_{h,h+0.21-\epsilon}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^7 \cap \mathfrak{F}, \quad P_7 := P_h^y, \quad p_{61} := P_{h,h+0.21-\epsilon}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^6 \cap \mathfrak{F}, \quad P_6 := P_h^x, \\ p_{51} &:= P_{h,h+0.21-\epsilon}^z \cap \mathbb{K}_\epsilon^5 \cap \mathfrak{F}, \quad P_5 := P_h^z. \end{aligned}$$

Azt mutatjuk meg, hogy ha

$$\alpha_1 := \min_{i \in \{1,3,4,5,6,7\}} (d(p_{i1}, P_i)) = d(p_{j1}, P_j),$$

akkor

$$p_{j1} \in G_{j1}.$$

Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $p_{j1} \notin G_{j1}$. Feltehetjük, hogy $j = 5$. Ekkor $\alpha_1 = d(p_{51}, P_5)$ és $P_{h-\alpha_1,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} = \emptyset$.

A 4.2. Lemma miatt $P_{h,H+\alpha_1+\epsilon}^z \cap \mathbb{K}_\epsilon^5 \cap \mathfrak{F} = \emptyset$, azaz $d(p_{51}, P_5) \geq \alpha_1 + 2\epsilon > \alpha_1$; ellentmondás.

Így feltehetjük, hogy $p_{51} \in G_{51}$ és $d(p_{51}, P_5) = \alpha_1$.

Jelölje (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) a p_{ij} pont koordinátáit, ahol $p_{ij} \in \mathbb{K}_\epsilon^i$.

Mivel $P_{H-0.21,h}^z \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} = \emptyset$, így

$$P_{0,0.21}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset, \quad P_{H-0.21,h}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset, \quad P_{0,0.21}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset, \quad P_{H-0.21,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset.$$

Legyen

$$\begin{aligned} S_{00} &:= P_{0,0.21}^x \cap P_{0,0.21}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1, \quad S_{10} := P_{H-0.21,h}^x \cap P_{0,0.21}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1, \\ S_{01} &:= P_{0,0.21}^x \cap P_{H-0.21,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1, \quad S_{11} := P_{H-0.21,h}^x \cap P_{H-0.21,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1. \end{aligned}$$

Két esetet különböztetünk meg:

2.1. Eset. $S_{00} \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$ és $S_{11} \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$.

2.2. Eset. $S_{01} \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$ és $S_{10} \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$.

(A pontok nem adhatnak más elhelyezkedést.) Lássuk az esetek bizonyítását!

2.1. Eset. $S_{00} \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$ és $S_{11} \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$.

Azt fogjuk megmutatni, hogy a p_{11}, p_{12}, p_{51} pontoknak nincs elég hely. Legyen

$$p_{12} := P_{0,0.21}^x \cap P_{0,0.21}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} = S_{00} \cap \mathfrak{F}.$$

Emlékeztetõül egy korábbi jelölés, miszerint $p_{11} = P_{H-0.21,h}^x \cap P_{H-0.21,h}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} = S_{11} \cap \mathfrak{F}$. A p_{12} pontot kicseréljük a P_0^y síkra való merőleges vetületére. Vegyük észre, hogy $x_{51} < H - 0.21$, tehát $x_{51} < x_{11}$, így a p_{11} pontot kicseréljük a P_h^x síkra való merőleges vetületére. Legyen $p_{51}p'_{51}$ a p_{51} végpontú, P_0^z síkkal párhuzamos, p_{11}, p_{12} pontokat tartalmazó egyenesre merőleges és a P_0^y síkot nem metsző félegyenes. (Vegyük észre, hogy a $p_{51}p'_{51}$ félegyenes és az $(x_{11}, y_{11}, h + \alpha_1), (x_{12}, y_{12}, h + \alpha_1)$ pontokat tartalmazó egyenes diszjunkt.) A p_{51} pontot kicseréljük a $p_{51}p'_{51}$ félegyenes és a \mathbb{K}_ϵ^5 kocka határának metszéspontjára (ez a metszéspont létezik). Ezen cserék közben a p_{11}, p_{12}, p_{51} pontok páronkénti távolsága nem csökken. Ekkor

$$y_{12} = 0, \quad x_{11} = h, \quad z_{51} = h + \alpha, \quad z_{52} \in \text{bd } \mathbb{K}_\epsilon^5.$$

Két esetet különböztetünk meg:

2.1.1. *Eset.* $z_{11} < z_{12}$.

2.1.2. *Eset.* $z_{11} > z_{12}$.

(Az egyenlőség nem teljesülhet.) Lássuk az esetek bizonyítását!

2.1.1. *Eset.* $z_{11} < z_{12}$.

A p_{11} pontot kicseréljük a P_0^z síkra való merőleges vetületére. Ezen csere közben a p_{11}, p_{12}, p_{51} pontok páronkénti távolsága nem csökken. Az α_1 értelmezéséből következik, hogy $y_{11} \leq h - \alpha_1$. A cserék miatt kapjuk, hogy

$$p_{11} \in a_{12}a_{1234}.$$

Ekkor a p_{12} pont nem lehet a P_0^z síkon. Legyen $p_{12}p'_{12}$ a p_{12} végpontú, P_0^y síkkal párhuzamos, p_{11}, p_{51} pontokat tartalmazó egyenesre merőleges és a P_h^x síkot nem metsző félegyenes. (Vegyük észre, hogy a $p_{12}p'_{12}$ félegyenes és az $(x_{11}, 0, z_{11}), (x_{51}, 0, z_{51})$ pontokat tartalmazó egyenes diszjunkt.) A p_{12} pontot kicseréljük a $p_{12}p'_{12}$ félegyenes és az $a_{1a_{15}}$ szakasz metszéspontjára. (Ez a metszéspont létezik, mert a $p_{12}p'_{12}$ félegyenes nem metszheti az $a_{1a_{12}}$ szakaszt.) Ezen cserék közben a p_{11}, p_{12}, p_{51} pontok páronkénti távolsága nem csökken. Ekkor

$$p_{11} \in a_{12}a_{1234}, \quad p_{12} \in a_{1a_{15}}.$$

Legyen

$$\gamma_1 := d(P_{h-\alpha_1}^y, p_{11}).$$

Alkalmazzuk a 4.6. Megjegyzést a p_{11}, p_{12} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk

$$z_{12} > 2\alpha_1 + 2\gamma_1 \geq 2\alpha_1 + \gamma_1,$$

így a p_{51} pont nem lehet a P_0^x síkon, azaz

$$p_{11} \in a_{12}a_{1234}, \quad p_{12} \in a_1a_{15}, \quad y_{51} = h, \quad z_{51} = h + \alpha_1.$$

Alkalmazzuk a 4.6. Megjegyzést a p_{12}, p_{51} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk

$$x_{51} > 2\alpha_1 + 2\gamma_1 \geq 2\alpha_1 + \gamma_1.$$

Alkalmazzuk a 4.7. Megjegyzést a p_{51}, p_{11} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk

$$y_{11} < h - \alpha_1 - \gamma_1;$$

ellentmondás. Ezzel beláttuk a 2.1.1. Esetet.

2.1.2. Eset. $z_{11} > z_{12}$.

A p_{12} pontot kicseréljük a P_0^z síkra való merőleges vetületére. Ekkor

$$p_{12} \in a_1a_{12},$$

azaz p_{11} nem lehet a P_0^z síkon. Az α_1 értelmezéséből következik, hogy $y_{11} \leq h - \alpha_1$. Legyen $p_{11}p'_{11}$ a p_{11} végpontú, P_0^x síkkal párhuzamos, p_{12}, p_{51} pontokat tartalmazó egyenesre merőleges és a P_0^y síkot nem metsző félegyenes. (Vegyük észre, hogy a $p_{11}p'_{11}$ félegyenes és a $(h, y_{12}, z_{12}), (h, y_{51}, z_{51})$ pontokat tartalmazó egyenes diszjunkt.) A p_{11} pontot kicseréljük a $p_{11}p'_{11}$ félegyenes és a $P_{h-\alpha_1}^y$ sík metszéspontjára. (Ez a metszéspont létezik és a \mathbb{K}_e^1 kocka határán van.) Ezen cserék közben a p_{11}, p_{12}, p_{51} pontok páronkénti távolsága nem csökken. Legyen

$$\gamma_2 := d(P_0^x, p_{12}).$$

Ekkor

$$x_{11} = h, \quad y_{11} = h - \alpha_1, \quad p_{12} \in a_1a_{12}.$$

Két esetet különböztetünk meg:

2.1.2.1. Eset. $y_{51} = h$ és $z_{51} = h + \alpha_1$.

2.1.2.2. Eset. $x_{51} = 0$ és $y_{51} \neq h$ és $z_{51} = h + \alpha_1$.

Lássuk az esetek bizonyítását!

2.1.2.1. Eset. $y_{51} = h$ és $z_{51} = h + \alpha_1$.

Alkalmazzuk a 4.6. Megjegyzést a p_{12}, p_{11} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk $z_{11} > 2\alpha_1 + \gamma_2 \geq \frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\gamma_2$. Alkalmazzuk a 4.6. Megjegyzést a p_{11}, p_{51} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk $y_{51} > h + \gamma_2$; ellentmondás. Ezzel beláttuk a 2.1.2.1. Esetet.

2.1.2.2. Eset. $x_{51} = 0$ és $y_{51} \neq h$ és $z_{51} = h + \alpha_1$.

Alkalmazzuk a 4.6. Megjegyzést a p_{12}, p_{11} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk $z_{11} > 2\alpha_1 + \gamma_2 \geq \frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\gamma_2$. Alkalmazzuk a 4.6. Megjegyzést a p_{11}, p_{51} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk

$$y_{51} > h + \gamma_2; \text{ (ellentmondás) },$$

vagy

$$y_{51} < h - 2\alpha_1 - \gamma_2.$$

Alkalmazzuk a 4.8. Megjegyzést a p_{51}, p_{12} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk $x_{12} > \gamma_2$; ellentmondás.

Ezzel beláttuk a 2.1.2.2. Esetet és a 2.1. Esetet.

2.2. Eset. $S_{01} \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$ és $S_{10} \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$.

Legyen

$$p_{12} := P_{H-0.21,h}^x \cap P_{0,0.21}^y \cap \mathbb{K}_e^1 \cap \mathfrak{F} = S_{10} \cap \mathfrak{F}.$$

Emlékeztetőül egy korábbi jelölés, miszerint $p_{11} = \mathfrak{F} \cap P_{0,0.21}^x \cap P_{H-0.21,h}^y \cap \mathbb{K}_e^1 = S_{01} \cap \mathfrak{F}$. Vegyük észre, hogy $0.21 < x_{51} < h - 0.21$. A p_{12} pontot kicseréljük a P_h^x síkra való merőleges vetületére, majd a P_0^y síkra való merőleges vetületére. A p_{11} pontot kicseréljük a P_0^x síkra való merőleges vetületére. Legyen $p_{51}p'_{51}$ a p_{51} végpontú, P_0^z síkkal párhuzamos, p_{11}, p_{12} pontokat tartalmazó egyenesre merőleges és a P_0^y síkot nem metsző félegyenes. (Vegyük észre, hogy a $p_{51}p'_{51}$ félegyenes és az $(x_{11}, y_{11}, h + \alpha_1)$, $(x_{12}, y_{12}, h + \alpha_1)$ pontokat tartalmazó egyenes diszjunkt.) A p_{51} pontot kicseréljük

a $p_{51}p'_{51}$ félegyenes és a \mathbb{K}_ϵ^5 kocka határának a metszéspontjára. Ezen cserék közben a p_{11}, p_{12}, p_{51} pontok páronkénti távolsága nem csökken. Ekkor

$$x_{11} = 0, \quad p_{12} \in a_{12}a_{1256}, \quad z_{51} = h + \alpha_1.$$

Két esetet különböztetünk meg:

2.2.1. Eset. $z_{11} < z_{12}$.

2.2.2. Eset. $z_{11} > z_{12}$.

(Az egyenlőség nem teljesülhet.) Lássuk az esetek bizonyítását!

2.2.1. Eset. $z_{11} < z_{12}$.

A p_{11} pontot kicseréljük a P_0^z síkra való merőleges vetületére. Az α_1 értelmezéséből következik $\left(\text{emlékeztetőül } \alpha_1 = \min_{i \in \{1,3,4,5,6,7\}} (d(p_{i1}, P_i)) \right)$, hogy $p_{11} \in a_1a_{14}$, $y_{11} \leq h - \alpha_1$. Vegyük észre, hogy $p_{12} \notin P_0^z$. Legyen $\gamma_3 := d(P_{h-\alpha_1}^y, p_{11})$. Alkalmazzuk a 4.6. Megjegyzést a p_{11}, p_{12} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk $z_{12} > 2\alpha_1 + 2\gamma_3 \geq 2\alpha_1 + \gamma_3$. Ekkor $p_{51} \notin P_h^x$, így $y_{51} = h$. Alkalmazzuk a 4.6. Megjegyzést a p_{12}, p_{51} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk $x_{51} < h - 2\alpha_1 - 2\gamma_3 < h - 2\alpha_1 - \gamma_3$. Alkalmazzuk a 4.7. Megjegyzést a p_{51}, p_{11} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk $x_{11} < h - \alpha_1 - \gamma_3$; ellentmondás. Ezzel beláttuk a 2.2.1. Esetet.

2.2.2. Eset. $z_{11} > z_{12}$.

A p_{12} pontot kicseréljük a P_0^z síkra való merőleges vetületére. Ekkor

$$p_{12} = a_{12}.$$

Az α_1 értelmezéséből következik, hogy $y_{11} \leq h - \alpha_1$. Vegyük észre, hogy $p_{11} \notin P_0^z$, így $p_{11} \in P_0^x$. Használjuk a korábbi jelölést, miszerint $\gamma_3 = d(P_{h-\alpha_1}^y, p_{11})$. Ekkor

$$x_{11} = 0, \quad y_{11} = h - \alpha_1 - \gamma_3, \quad p_{12} = a_{12}, \quad z_{51} = h + \alpha_1.$$

Alkalmazzuk a 4.6. Megjegyzést a p_{12}, p_{11} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk $z_{11} > 2\alpha_1 + 2\gamma_3 \geq 2\alpha_1 + \gamma_3$. Alkalmazzuk a 4.6. Megjegyzést a p_{11}, p_{51} pontok közötti távolság becslésére (a Megjegyzés feltételei teljesülnek) és kapjuk

$$y_{51} > h + \alpha_1 + \gamma_3; \text{ ellentmondás,}$$

vagy

$$y_{51} < h - 3\alpha_1 - 3\gamma_3 < h - 2\alpha_1 - \gamma_3; \text{ ellentmondás (lásd 4.8. Megjegyzés).}$$

Ezzel beláttuk a 2.2.2. Esetet és a 2.2. Esetet és a 2. Esetet.

3. *Eset.* $G^1 \cap \mathfrak{F} = \emptyset$ és $G^2 \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$.

A bizonyítás hasonló a 2. Eset bizonyításához.

4. *Eset.* $G^1 \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$ és $G^2 \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$.

Jelölje p_{i1}, p_{i2} az $\mathfrak{F} \cap \mathbb{K}_\epsilon^i$ halmaz elemeit, ahol $i \in \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $p_{51} \in G_{51}$. Hét esetet különböztetünk meg:

4.1. *Eset.* $p_{52} \in G_{52}$.

4.2. *Eset.* $p_{12} \in G_{12}$.

4.3. *Eset.* $p_{42} \in G_{42}$.

4.4. *Eset.* $p_{32} \in G_{32}$.

4.5. *Eset.* $p_{72} \in G_{72}$.

4.6. *Eset.* $p_{62} \in G_{62}$.

4.7. *Eset.* $p_{51} \in G_{52}$.

Lássuk az esetek bizonyítását!

4.1. *Eset.* $p_{52} \in G_{52}$.

Ekkor $\text{diam}(G_{51} \cup G_{52}) < 1$; ellentmondás. Ezzel beláttuk a 4.1. Esetet.

4.2. *Eset.* $p_{12} \in G_{12}$.

A 4.3. Lemma miatt $G_{12} \cap \mathfrak{F} = \emptyset$; ellentmondás. Ezzel beláttuk a 4.2. Esetet.

4.3. *Eset.* $p_{42} \in G_{42}$.

Ekkor $\text{diam}(G_{51} \cup G_{42}) < 1$; ellentmondás. Ezzel beláttuk a 4.3. Esetet.

4.4. *Eset.* $p_{32} \in G_{32}$.

A 4.3. Lemmából következik, hogy $P_{H-0.21,h}^z \cap \mathbb{K}_\epsilon^1 \cap \mathfrak{F} = \emptyset$. Mivel $\text{diam}(G_{51} \cup G_{42}) < 1$ és a 4.2. Lemma miatt

$$P_{h,h+0.21-\epsilon}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^4 \cap \mathfrak{F} = \emptyset.$$

Alkalmazzuk a 4.1. Következményt a $\mathbb{K}_\epsilon^3, \mathbb{K}_\epsilon^4$ kockákra és kapjuk, hogy

$$P_{H-0.21,h}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^4 \cap \mathfrak{F} = \emptyset.$$

Mivel

$$\text{diam}(\mathbb{K}_\epsilon^4 \setminus (P_{h,h+0.21-\epsilon}^y \cup P_{H-0.21,h}^x)) < 1,$$

így

$$\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon^4 \cap \mathfrak{F}) \leq 1;$$

ellentmondás. Ezzel beláttuk a 4.4. Esetet.

4.5. *Eset.* $p_{72} \in G_{72}$.

Már láttuk a 4.4. Esetben, hogy $G_{51} \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$ feltételből következik, hogy $P_{h,h+0.21-\epsilon}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^4 \cap \mathfrak{F} = \emptyset$. Hasonló okoskodással kapjuk, hogy a $G_{72} \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$ feltételből következik, hogy

$$P_{H-0.21,h}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^4 \cap \mathfrak{F} = \emptyset;$$

ellentmondás (lásd 4.4. Eset.). Ezzel beláttuk a 4.5. Esetet.

4.6. *Eset.* $p_{62} \in G_{62}$.

Már láttuk a 4.4. Esetben, hogy $P_{h,h+0.21-\epsilon}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^4 \cap \mathfrak{F} = \emptyset$. Hasonló okoskodással kapjuk, hogy

$$P_{H-0.21,h}^z \cap \mathbb{K}_\epsilon^3 \cap \mathfrak{F} = \emptyset.$$

Ha $G_{32} \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$, akkor használjuk a 4.4. Esetet és a bizonyítás kész.

Ha $G_{32} \cap \mathfrak{F} = \emptyset$, akkor használjuk a 4.2. Lemmát a $\mathbb{K}_\epsilon^4, \mathbb{K}_\epsilon^3$ kockákra és kapjuk

$$P_{h,h+0.21-\epsilon}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^3 \cap \mathfrak{F} = \emptyset.$$

Mivel

$$\text{diam}(\mathbb{K}_\epsilon^3 \setminus (P_{H-0.21,h}^z \cup P_{h,h+0.21-\epsilon}^x)) < 1,$$

így

$$\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon^3 \cap \mathfrak{F}) \leq 1;$$

ellentmondás. Ezzel beláttuk a 4.6. Esetet.

4.7. *Eset.* $p_{51} \in G_{52}$.

Ha $G_{32} \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$, akkor használjuk a 4.4. Esetet és a bizonyítás kész.

Ha $G_{32} \cap \mathfrak{F} = \emptyset$, akkor beláttuk a 4.6. Esetben, hogy $P_{h,h+0.21-\epsilon}^x \cap \mathbb{K}_\epsilon^3 \cap \mathfrak{F} = \emptyset$.

Ha $G_{72} \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$, akkor használjuk a 4.5. Esetet és a bizonyítás kész.

Ha $G_{72} \cap \mathfrak{F} = \emptyset$, akkor használjuk a 4.2. Lemmát a $\mathbb{K}_\epsilon^3, \mathbb{K}_\epsilon^7$ kockákra és kapjuk

$$P_{h,h+0.21-\epsilon}^z \cap \mathbb{K}_\epsilon^7 \cap \mathfrak{F} = \emptyset.$$

Hasonlóan, mint a 4.4. Esetben a $p_{51 \in G_{52}}$ feltételből kapjuk, hogy $P_{h,h+0.21-\epsilon}^y \cap \mathbb{K}_\epsilon^7 \cap \mathfrak{F} = \emptyset$. Mivel

$\text{diam}(\mathbb{K}_\epsilon^7 \setminus (P_{h,h+0.21-\epsilon}^z \cup P_{h,h+0.21-\epsilon}^y)) < 1$, így $\text{card}(\mathbb{K}_\epsilon^7 \cap \mathfrak{F}) \leq 1$; ellentmondás. Ezzel beláttuk a 4.7. Esetet és a 4. Esetet és a Tétel állítását. \square

5. A 4-dimenziós egységkocka fedése gömbökkel

5.1. Problémafelvetés

Brass, Moser és Pach [6] könyvében olvashatunk a következő problémáról: Legyen $g(n)$ az a minimális szám, amelyre igaz, hogy az egység élű négyzet lefedhető n db $g(n)$ sugarú körrel.

Ezzel kapcsolatban sok eredményt olvashatunk a [6], [4] könyvekben. Pl.: $g_1^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $g_2^2 = \frac{\sqrt{5}}{4}$, $g_3^2 = \frac{\sqrt{65}}{16}$, $g_4^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, g_5^2 , g_7^2 - Heppes, Melissen [25]. Az $n \leq 20$ értékekre konstrukciók - Tarnai, Gáspár, Melissen, Schuur [62], [41]. Viszont [6] említi, hogy keveset tudunk ennek a problémának a magasabb dimenziós változatáról.

Legyen g_n^d az a minimális szám, amelyre igaz, hogy az egység élű d -dimenziós kocka lefedhető n db $g(n)$ sugarú d -dimenziós gömbbel.

G. Kuperberg, W. Kuperberg [31] megoldották a $d = 3, n = 2, 3, 4, 8$ és a $d \geq 4, n = 4$ eseteket.

Új eredmény ebben a témakörben a $d = 4, n = 8$ eset.

6. Tétel. *Annak a legkisebb 4-dimenziós gömbnek a sugara $\sqrt{\frac{5}{12}}$, amelynek 8 kongruens példányával lefedhető a 4-dimenziós egységkocka, azaz $g_8^4 = \sqrt{\frac{5}{12}}$.*

Hasonló eredményeket találunk Rogers [46], Verger-Gaugray [63] munkáiban a d dimenziós gömb fedéséről, valamint Börözczy, Jr., Fábián, Wintsche [5] munkájában a d -dimenziós keresztpolitóp fedéséről.

5.2. A bizonyítás vázlata

Először megadunk 8 darab $\sqrt{\frac{5}{12}}$ sugarú gömböt, amelyek lefedik a 4-dimenziós egységkockát, majd megmutatjuk, hogy a 4-dimenziós egységkocka élei nem fedhetők le 8 darab ennél kisebb sugarú gömbbel.

5.3. Előkészületek

Jelölje $C^d := [0, 1]^d$ a d -dimenziós egységkockát. Az első lemma megfogalmazása előtt lássuk a következő pontokat a 4-dimenziós euklideszi térben. Legyen

$$\begin{aligned} o_1 \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6} \right), o_2 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6} \right), o_3 \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right), o_4 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2} \right), o_5 \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2} \right), o_6 \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6} \right), \\ o_7 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6} \right), o_8 \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6} \right), m \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), o_1^3 \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, 0 \right), o_2^3 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 0 \right), o_3^3 \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0 \right), \\ o_4^3 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0 \right), o_5^3 \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 0 \right). \end{aligned}$$

5.1. Lemma. $A \mathbf{B}^4 \left(o_i, \sqrt{\frac{5}{12}} \right) \subset \mathbb{R}^4$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) gömbök lefedik a 4-dimenziós C^4 egységkockát.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{B}_i^4 := \mathbf{B}^4 \left(o_i, \sqrt{\frac{5}{12}} \right)$, ahol $i = 1, 2, \dots, 8$.

Mivel $d(m, o_i) = \sqrt{\frac{1}{3}} < \sqrt{\frac{5}{12}}$, így a C^4 kocka m középpontja benne van mindegyik \mathbf{B}_i^4 gömbben ($i = 1, 2, \dots, 8$).

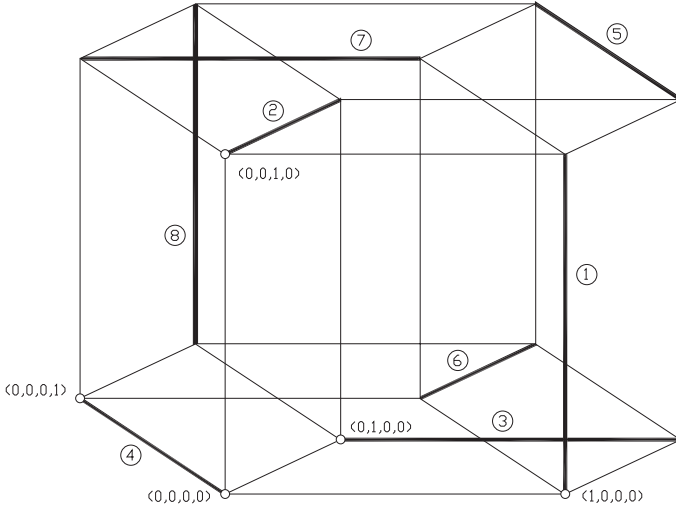
Megmutatjuk, hogy a \mathbf{B}_i^4 gömbök ($i = 1, 2, \dots, 8$) lefedik a C^4 kocka 3-dimenziós hiperlapjait. Ebből következi, hogy a \mathbf{B}_i^4 gömbök ($i = 1, 2, \dots, 8$) lefedik a C^4 kockát. (A 38. ábrán a vastag élek azok, amelyek teljes egészében egy \mathbf{B}_i^4 gömbben vannak.) Megmutatjuk, hogy a \mathbf{B}_i^4 gömbök ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) lefedik a $[0, 1]^3 \times \{0\}$ hiperlapot (a többi hiperlap fedése hasonló).

A 4-dimenziós \mathbf{B}_i^4 gömbök ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) és az $x_4 = 0$ hipersík metszetei rendre a következő 3-dimenziós gömbök $\mathbf{B}_i^3 := \mathbf{B}^3 \left(o_i^3, \sqrt{\frac{7}{18}} \right)$, ha $i = 1, 2, 3$ és $\mathbf{B}_i^3 := \mathbf{B}^3 \left(o_i^3, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$, ha $i = 4, 5$.

Először megmutatjuk, hogy a $C_0^3 := [0, \frac{1}{2}]^3 \times \{0\}$ (3-dimenziós) kockát lefedik a 3-dimenziós \mathbf{B}_i^3 gömbök ($i = 1, 2, 3, 4$) (39. ábra).

Legyen $p(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$. Mivel $d(p, o_i^3) = \sqrt{\frac{11}{36}} < \sqrt{\frac{7}{18}}$, ha $i = 1, 2, 3$ és $d(p, o_4^3) = \frac{1}{\sqrt{12}} < \frac{1}{\sqrt{6}}$, így $p \in \mathbf{B}_i^3$, ha $i = 1, 2, 3, 4$. Ha megmutatjuk, hogy a $C_0^3 \times \{0\}$ (3-dimenziós) kocka 2-dimenziós lapjait lefedik a \mathbf{B}_i^3 ($i = 1, 2, 3, 4$) gömbök, akkor megkapjuk, hogy a C_0^3 kocka lefedett a \mathbf{B}_i^3 gömbök által ($i = 1, 2, 3, 4$).

Lássuk a $(0, 0, 0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$, $(0, \frac{1}{2}, 0, 0)$ csúcsokkal rendelkező 2-dimenziós lapot! Mivel a $\text{conv}((0, 0, 0, 0), (\frac{1}{2}, 0, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0, 0), (0, \frac{1}{2}, 0, 0))$ tartományt a \mathbf{B}_4^3 gömb és a $\text{conv}((\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0), (0, \frac{1}{2}, 0, 0))$ tartományt a \mathbf{B}_3^3 gömb fedi, ezért a fenti 2-dimenziós lapot a $\mathbf{B}_3^3, \mathbf{B}_4^3$ gömbök lefedik. Hasonlóan a $(0, 0, 0, 0)$,



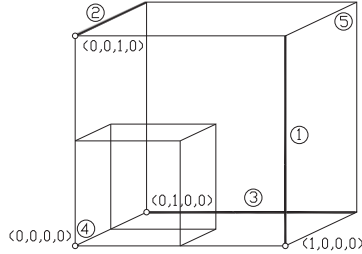
38. ábra.

$(\frac{1}{2}, 0, 0, 0), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0), (0, 0, \frac{1}{2}, 0)$ csúcsokkal rendelkező 2-dimenziós lapot a $\mathbf{B}_1^3, \mathbf{B}_4^3$ gömbök és a $(0, 0, 0, 0), (0, \frac{1}{2}, 0, 0), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (0, 0, \frac{1}{2}, 0)$ csúcsokkal rendelkező 2-dimenziós lapot a $\mathbf{B}_2^3, \mathbf{B}_4^3$ gömbök fedik.

Lássuk az $(\frac{1}{2}, 0, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ csúcsokkal rendelkező 2-dimenziós lapot! Mivel a $\text{conv}((\frac{1}{2}, 0, 0, 0), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0))$ tartományt a \mathbf{B}_1^3 gömb és a $\text{conv}((\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0))$ tartományt a \mathbf{B}_3^3 gömb fed, ezért a fenti 2-dimenziós lapot a $\mathbf{B}_1^3, \mathbf{B}_3^3$ gömbök lefedik. Hasonlóan a $(0, 0, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ csúcsokkal rendelkező 2-dimenziós lapot a $\mathbf{B}_1^3, \mathbf{B}_2^3$ és a $(0, \frac{1}{2}, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ csúcsokkal rendelkező 2-dimenziós lapot a $\mathbf{B}_2^3, \mathbf{B}_3^3$ gömbök fedik, azaz a C_0^3 kocka fedett.

Hasonlóan a $[\frac{1}{2}, 1]^3 \times \{0\}$ kockát a 3-dimenziós $\mathbf{B}_1^3, \mathbf{B}_2^3, \mathbf{B}_3^3, \mathbf{B}_5^3$ gömbök fedik.

Másodszor megmutatjuk, hogy a $[\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}] \times \{0\}$ kockát a 3-dimenziós $\mathbf{B}_1^3, \mathbf{B}_3^3$ gömbök fedik.



39. ábra.

Mivel a $\text{conv}((1, 0, 0, 0), (1, \frac{1}{2}, 0, 0), (\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0), (\frac{1}{2}, 0, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0), (1, 0, \frac{1}{2}, 0), (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0))$ tartományt a \mathbf{B}_1^3 gömb fedi és a $\text{conv}((\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0), (1, \frac{1}{2}, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0))$ tartományt a \mathbf{B}_3^3 gömb fedi ezért a fenti kocka lefedett $\mathbf{B}_1^3, \mathbf{B}_3^3$ gömbök által.

Hasonlóan az $[\frac{1}{2}, 1]^2 \times [0, \frac{1}{2}] \times \{0\}$ kockát a 3-dimenziós $\mathbf{B}_1^3, \mathbf{B}_3^3$ gömbök fedik és a $[0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \times \{0\}$ kockát a 3-dimenziós $\mathbf{B}_2^3, \mathbf{B}_3^3$ gömbök fedik és a $[0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1]^2 \times \{0\}$ kockát a 3-dimenziós $\mathbf{B}_2^3, \mathbf{B}_3^3$ gömbök fedik és a $[0, \frac{1}{2}]^2 \times [\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}$ kockát a 3-dimenziós $\mathbf{B}_1^3, \mathbf{B}_2^3$ gömbök fedik és az $[\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}$ kockát a 3-dimenziós $\mathbf{B}_1^3, \mathbf{B}_2^3$ gömbök fedik. Ebből következik, hogy a $[0, 1]^3 \times \{0\}$ kockát a 3-dimenziós \mathbf{B}_i^3 gömbök ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) lefedik, azaz a $[0, 1]^3 \times \{0\}$ kockát a 4-dimenziós \mathbf{B}_i^4 gömbök ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) lefedik.

Hasonlóan a $[0, 1]^3 \times \{1\}$ hiperlapot a 4-dimenziós $\mathbf{B}_4^4, \mathbf{B}_5^4, \mathbf{B}_6^4, \mathbf{B}_7^4, \mathbf{B}_8^4$ gömbök fedik és a $\{0\} \times [0, 1]^3$ hiperlapot a 4-dimenziós $\mathbf{B}_2^4, \mathbf{B}_3^4, \mathbf{B}_4^4, \mathbf{B}_7^4, \mathbf{B}_8^4$ gömbök fedik és a $\{1\} \times [0, 1]^3$ hiperlapot a 4-dimenziós $\mathbf{B}_1^4, \mathbf{B}_3^4, \mathbf{B}_5^4, \mathbf{B}_6^4, \mathbf{B}_7^4$ gömbök fedik és a $[0, 1] \times \{0\} \times [0, 1]^2$ hiperlapot a 4-dimenziós $\mathbf{B}_1^4, \mathbf{B}_4^4, \mathbf{B}_4^4, \mathbf{B}_6^4, \mathbf{B}_7^4$ gömbök fedik és a $[0, 1] \times \{1\} \times [0, 1]^2$ hiperlapot a 4-dimenziós $\mathbf{B}_2^4, \mathbf{B}_3^4, \mathbf{B}_5^4, \mathbf{B}_6^4, \mathbf{B}_8^4$ gömbök fedik és a $[0, 1]^2 \times \{0\} \times [0, 1]$ hiperlapot a 4-dimenziós $\mathbf{B}_1^4, \mathbf{B}_4^4, \mathbf{B}_4^4, \mathbf{B}_6^4, \mathbf{B}_8^4$ gömbök fedik és a $[0, 1]^2 \times \{1\} \times [0, 1]$ hiperlapot a 4-dimenziós $\mathbf{B}_4^4, \mathbf{B}_2^4, \mathbf{B}_5^4, \mathbf{B}_7^4, \mathbf{B}_8^4$ gömbök fedik. Így a 4-dimenziós C^4 kocka 3-dimenziós hiperlepjait lefedik a \mathbf{B}_i^4 ($i = 1, 2, \dots, 8$) gömbök, azaz a C^4 kockát lefedik a \mathbf{B}_i^4 ($i = 1, 2, \dots, 8$) gömbök. Ezzel beláttuk a Lemma állítását. \square

5.2. Lemma. Legyen $a_1, a_2 \in \mathbf{B}^2(o, r) \subset \mathbb{R}^2$, $(\frac{1}{2} < r)$, $d(a_1, a_2) = 1$. Legyen R_{a_1, b_1} és R_{a_2, b_2} két félegyenes, amely merőleges az L_{a_1, a_2} egyenesre. Ha $d(o, L_{a_1, a_2})$ és r rögzített számok, akkor

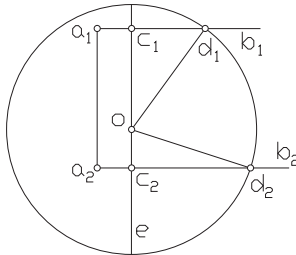
$$\text{diam}(R_{a_1, b_1} \cap \mathbf{B}^2(o, r)) + \text{diam}(R_{a_2, b_2} \cap \mathbf{B}^2(o, r))$$

értéke abban az esetben a legnagyobb, ha $d(o, a) = d(o, b)$ és $R_{a_1, b_1}, R_{a_2, b_2}$ félegyenesek az L_{a_1, a_2} által határolt, o pontot tartalmazó zárt félsíkban fekszenek.

Bizonyítás. Legyen h_i egy, az L_{a_i, b_i} egyenesen lévő, R_{a_i, b_i} félegyenesen nem lévő pont, ahol $i = 1, 2$.

Ha az L_{a_1, a_2} egyenes nem tartalmazza az o pontot és $R_{a_1, b_1} \not\subset H(L_{a_1, a_2}, o)$, akkor $\text{diam}(R_{a_1, b_1} \cap \mathbf{B}^2(o, r)) < \text{diam}(R_{a_1, h_1} \cap \mathbf{B}^2(o, r))$. Ekkor az R_{a_1, b_1} félegyeneset kicseréljük az R_{a_1, h_1} félegyenesre és az R_{a_1, h_1} félegyeneset ismét R_{a_1, b_1} szimbólummal jelöljük. Hasonlóan, ha az L_{a_1, a_2} egyenes nem tartalmazza az o pontot és $R_{a_2, b_2} \not\subset H(L_{a_1, a_2}, o)$, akkor az R_{a_2, b_2} félegyeneset kicseréljük az R_{a_2, h_2} félegyenesre és az R_{a_2, h_2} félegyeneset ismét R_{a_2, b_2} szimbólummal jelöljük. Ha L_{a_1, a_2} tartalmazza az o pontot és $H(L_{a_1, a_2}, a_1)$ nem tartalmazza az a_2 pontot, akkor az R_{a_2, b_2} félegyeneset kicseréljük az R_{a_2, h_2} félegyenesre és az R_{a_2, h_2} félegyeneset ismét R_{a_2, b_2} szimbólummal jelöljük. Ezen cserék közben $\text{diam}(R_{a_1, b_1} \cap \mathbf{B}^2(o, r)) + \text{diam}(R_{a_2, b_2} \cap \mathbf{B}^2(o, r))$ nem csökkent.

Legyen e az o pontot tartalmazó, L_{a_1, a_2} egyenessel párhuzamos egyenes (40. ábra).



40. ábra.

Legyen c_1, c_2 rendre az e egyenes és az $R_{a_1, b_1}, R_{a_2, b_2}$ metszéspontja. Legyen d_1, d_2 rendre

a bd $\mathbf{B}^2(o, r)$ és a $R_{a_1, b_1}, R_{a_2, b_2}$ félegyenes metszéspontja. Legyen $x := d(o, c_1)$ és

$$\begin{aligned} f(x) &:= \text{diam}(R_{a_1, b_1} \cap \mathbf{B}^2(o, r)) + \text{diam}(R_{a_2, b_2} \cap \mathbf{B}^2(o, r)) = \\ &= d(a_1, d_1) + d(a_2, d_2) = 2d(o, L_{a_1, a_2}) + d(c_1, d_1) + d(c_2, d_2) = \\ &= 2d(o, L_{a_1, a_2}) + \sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - (1-x)^2}. \end{aligned}$$

Ekkor

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{1-x}{\sqrt{r^2 - (1-x)^2}}$$

és $f'(x) = 0$, ha $x = \frac{1}{2}$. Mivel $f''(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \frac{4r^2}{(r^2 - \frac{1}{4})\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}}} < 0$, így az f függvénynek lokális maximuma van az $x_0 = \frac{1}{2}$ pontban. Ezzel beláttuk a Lemma állítását. \square

5.3. Lemma. Legyen $R_{a, b_1}, R_{a, b_2}, R_{a, b_3} \subset \mathbb{R}^3$, $b_1 a b_2 \angle = \frac{\pi}{2}, b_1 a b_3 \angle = \frac{\pi}{2}, b_2 a b_3 \angle = \frac{\pi}{2}$ és $a \in \mathbf{B}^3(o, r) \subset \mathbb{R}^3$. Ekkor

$$\sum_{i=1,2,3} \text{diam}(R_{a, b_i} \cap \mathbf{B}^3(o, r)) \leq r \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Bizonyítás. Legyen $c_i := R_{a, b_i} \cap \text{bd } \mathbf{B}^3(o, r)$, ha $i = 1, 2, 3$. Nyilván

$$d(a, c_1) + d(a, c_2) \leq d(c_1, c_2)\sqrt{2},$$

$$d(a, c_2) + d(a, c_3) \leq d(c_2, c_3)\sqrt{2},$$

$$d(a, c_1) + d(a, c_3) \leq d(c_1, c_3)\sqrt{2}.$$

Így

$$d(a, c_1) + d(a, c_2) + d(a, c_3) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} (d(c_1, c_2) + d(c_2, c_3) + d(c_1, c_3)).$$

Mivel

$$d(c_1, c_2) + d(c_2, c_3) + d(c_1, c_3) \leq r3\sqrt{3},$$

így

$$\sum_{i=1,2,3} \text{diam}(R_{a, b_i} \cap \mathbf{B}^3(o, r)) = \sum_{i=1,2,3} d(a, c_i) \leq r \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Ezzel beláttuk a Lemma állítását. \square

Ha $R_{a, b_1} \cap \mathbf{B}^3(o, r) + R_{a, b_2} \cap \mathbf{B}^3(o, r) + R_{a, b_3} \cap \mathbf{B}^3(o, r) = r \frac{3\sqrt{6}}{2}$, akkor $a \in \text{int } \mathbf{B}^3(o, r)$.

5.4. Lemma. Legyen $a_1, a_2 \in \mathbf{B}^4(o, r) \subset \mathbb{R}^4$, $\left(\frac{1}{2} < r < \sqrt{\frac{5}{12}}\right)$ és $d(a_1, a_2) = 1$. Legyenek R_{a_j, b_i^j} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2$) olyan félegyenesek, amelyekre igaz, hogy $a_2 a_1 b_i^1 \angle = \frac{\pi}{2}$, $b_i^j a_j b_k^j \angle = \frac{\pi}{2}$, $b_i^1 \parallel b_i^2$ és az a_1, a_2, b_i^1 pontok által meghatározott síkban a $H(L_{a_1, a_2}, b_i^1)$ fél sík tartalmazza a b_i^2 pontot minden $i, k \in \{1, 2, 3\} (i \neq k), j = 1, 2$ esetén. Ekkor

$$d(a_1, a_2) + \sum_{i=1,2,3; j=1,2} \text{diam} \left(R_{a_j, b_i^j} \cap \mathbf{B}^4(o, r) \right) < 4.$$

Bizonyítás. A

$$d(a_1, a_2) + \sum_{i=1,2,3; j=1,2} \text{diam} \left(R_{a_j, b_i^j} \cap \mathbf{B}^4(o, r) \right)$$

értéke kisebb, mint

$$d(a_1, a_2) + \sum_{i=1,2,3; j=1,2} \text{diam} \left(R_{a_j, b_i^j} \cap \mathbf{B}^4 \left(o, \sqrt{\frac{5}{12}} \right) \right).$$

Legyen H az $a_1 a_2$ szakaszra merőleges, o pontot tartalmazó hipersík. Ha az R_{a_j, b_i^j} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2$) félegyenesek vetülete a H hipersíkra rögzített, akkor az 5.2. Lemma miatt

$$\sum_{i=1,2,3} \left(\text{diam} \left(R_{a_1, b_i^1} \cap \mathbf{B}^4 \left(o, \sqrt{\frac{5}{12}} \right) \right) + \text{diam} \left(R_{a_2, b_i^2} \cap \mathbf{B}^4 \left(o, \sqrt{\frac{5}{12}} \right) \right) \right)$$

akkor a legnagyobb, ha $d(o, a_1) = d(o, a_2)$. Így feltehetjük, hogy $d(o, a_1) = d(o, a_2)$.

Legyenek a H_1, H_2 hipersíkok rendre az $a_1 a_2$ szakaszra merőleges, a_1, a_2 pontot tartalmazó hipersíkok. Ekkor $\text{diam} \left(H_1 \cap \mathbf{B}^4 \left(o, \sqrt{\frac{5}{12}} \right) \right) = \text{diam} \left(H_2 \cap \mathbf{B}^4 \left(o, \sqrt{\frac{5}{12}} \right) \right) = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

Az 5.3. Lemma miatt

$$\begin{aligned} d(a_1, a_2) + \sum_{i=1,2,3; j=1,2} \text{diam} \left(R_{a_j, b_i^j} \cap \mathbf{B}^4 \left(o, \sqrt{\frac{5}{12}} \right) \right) &\leq 1 + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{3\sqrt{6}}{2} \right) = \\ &= 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk a Lemma állítását. \square

5.4. A Tétel bizonyítása

Emlékeztetőül a

6 Tétel. *Annak a legkisebb 4-dimenziós gömbnek a sugara $\sqrt{\frac{5}{12}}$, amelynek 8 kongruens példányával lefedhető a 4-dimenziós egységkocka, azaz $g_8^4 = \sqrt{\frac{5}{12}}$.*

Bizonyítás. Az 5.1. Lemma miatt 8 kongruens, $\sqrt{\frac{5}{12}}$ sugarú gömb lefedi a C^4 kockát. Tegyük fel, hogy a 4-dimenziós C^4 kocka lefedhető 8 olyan gömbbel, amelyek sugara $\frac{1}{2} < r < \sqrt{\frac{5}{12}}$ (nyilván 8 olyan gömbbel nem fedhető le a C^4 kocka, amelyek sugara legfeljebb $\frac{1}{2}$).

Mivel egy gömb, amelynek a sugara legfeljebb $\sqrt{\frac{5}{12}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ nem tartalmazhatja a C^4 kocka három csúcsát, így minden gömbben pontosan két csúcsának kell benne lennie a C^4 kockának. Az 5.4. Lemma miatt a C^4 kocka élhosszainak összege, amelyek egy $\frac{1}{2} < r < \sqrt{\frac{5}{12}}$ sugarú gömbben benne vannak kisebb, mint 4, azaz 8 egybevágó gömb, amelyek a sugara kisebb, mint $\sqrt{\frac{5}{12}}$ nem tudja lefedni a C^4 kocka éleit (a C^4 kocka élhosszösszege 32); ellentmondás. Ezzel beláttuk a Tétel állítását. \square

6. Pontok pakolása 5-dimanzziós kockába

6.1. Problémafelvetés

Brass, Moser és Pach [6] könyvében olvashatjuk (34. o. 14. Probléma) a következő problémát: Legyen $k(d)$ az egység élű d -dimenziós kockában elhelyezhető olyan pontok maximális száma, amelyek páronkénti távolsága legalább 1.

A problémát már Moser [38] 208-221. o., 41. Probléma, Guy [23], o. 244, Moser és Pach [39] is említi. Nyilván $d = 1, 2, 3$ esetén $k(d) = 2^d$ és a pontok helyzete egyértelmű ($d = 3$ esetén Schaer [47], és Bálint jr. (privát beszélgetés)). Ez a 4.1. fejezetben bevezetett m_n^d szimbólummal felírva $m_2^1 = 1, m_4^2 = 1, m_8^3 = 1$. Meir bebizonyította, hogy $k(4) = 17$ és Bálint [1] is bebizonyította más módszerekkel az előbbi egyenlőséget, sőt még azt is, hogy a pontok helyzete ekkor egyértelmű, azaz $m_{17}^4 = 1$. Többen vizsgálták a $\log k(d) = (\frac{1}{2} + o(1)) d \log d$, ha $d \rightarrow \infty$ kifejezést. Talata (privát beszélgetés) d -dimenziós ($d \geq 4$) térbeli bizonyos L_p metrika esetén adta meg a $k(d)$ értékét, sőt bebizonyította, hogy ekkor a pontok helyzete egyértelmű. Makai és Talata (privát beszélgetés) aszimptotikus becslést adtak a $k(d)$ értékére. Bálint [1] a $k(5)$ értékét adta meg akkor, ha a kocka minden csúcspontjában van egy pont (olyan pont, amiket pakolni szeretnénk a kockába). Ez az érték 34. Tehát $k(5) \geq 34$, azaz $m_{34}^5 \geq 1$. Sejtésként fogalmazta meg, hogy $k(5) = 34$, azaz az 5-dimenziós kockában 34 pontot tudunk úgy maximálisan elhelyezni, hogy páronként egymástól legalább 1 távolságra legyenek. A $k(5)$ értékére adunk most egy felső korlátot.

7. Tétel. *Az 5-dimenziós egységkockában az olyan pontok maximális száma legfeljebb 42, amely pontok páronkénti távolsága legalább 1, azaz $k(5) \leq 42$.*

Tehát $m_{42}^5 \geq 1$ és $m_{43}^5 < 1$.

6.2. Jelölések

Az 5-dimenziós egységkockát és annak csúcspontjait jelölje rendre $C^5 = [0, 1]^5$ és $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : \forall i \in \{1, 2, \dots, 5\} x_i \in \{0, 1\}\}$.

Legyen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ az \mathbf{x} pont koordinátái. Legyen

$$A_1 = \left\{ \mathbf{x} \in C^5 : \exists \mathbf{y} \in V \forall i \in \{1, 2, \dots, 5\} \left(|x_i - y_i| < \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\},$$

$$A_{\frac{1}{2}} = \left\{ \mathbf{x} \in C^5 : \exists \mathbf{y} \in V \exists i \in \{1, \dots, 5\} \forall n \in \{1, \dots, 5\} \setminus \{i\} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \leq |x_i - y_i| \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}, |x_n - y_n| < \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\},$$

$$A_{\frac{1}{4}} = \left\{ \mathbf{x} \in C^5 : \exists \mathbf{y} \in V \exists i, j \in \{1, \dots, 5\} (i \neq j) \forall m \in \{i, j\} \forall n \in \{1, \dots, 5\} \setminus \{i, j\} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \leq |x_m - y_m| \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}, |x_n - y_n| < \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\},$$

$$A_{\frac{1}{4}}^* = \left\{ \mathbf{x} \in C^5 : \exists i, j \in \{1, 2, \dots, 5\} (i \neq j) \left(x_i = \frac{1}{2}, x_j = \frac{1}{2} \right) \right\} \cap A_{\frac{1}{4}},$$

$$A_{\frac{31}{64}}^{\mathbf{y}} = \left\{ \mathbf{x} \in C^5 : \exists i, j \in \{1, \dots, 5\} (i \neq j) \forall m \in \{i, j\} \forall n \in \{1, \dots, 5\} \setminus \{i, j\} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \leq |x_m - y_m| \leq \frac{1}{2}, |x_n - y_n| < \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\} \setminus A_{\frac{1}{4}}^*, \text{ ahol } \mathbf{y} \in V$$

$$A_{\frac{1}{64}}^{*\mathbf{y}} = \left(\left\{ \mathbf{x} \in C^5 : \exists i \in \{1, 2, \dots, 5\} \left(x_i = \frac{1}{2} \right) \right\} \cap A_{\frac{1}{4}} \right) \setminus (A_{\frac{31}{64}} \cup A_{\frac{1}{4}}^*), \text{ ahol } \mathbf{y} \in V$$

$$A_{\frac{11}{64}}^{\mathbf{y}} = A_{\frac{1}{4}} \setminus (A_{\frac{31}{64}} \cup A_{\frac{1}{4}}^* \cup A_{\frac{1}{64}}^{*\mathbf{y}}), \text{ ahol } \mathbf{y} \in V$$

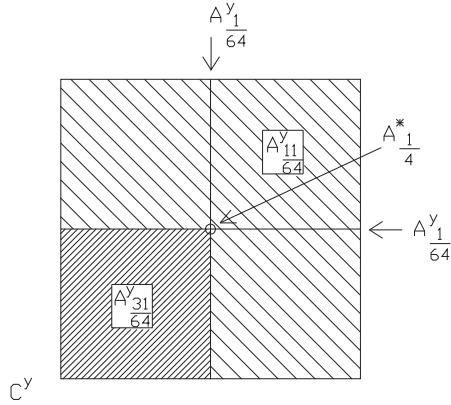
$$A_{\frac{1}{8}} = \left\{ \mathbf{x} \in C^5 : \exists \mathbf{y} \in V \exists i, j, k \in \{1, \dots, 5\} (i, j, k \text{ mind különböző}) \forall m \in \{i, j, k\} \forall n \in \{1, \dots, 5\} \setminus \{i, j, k\} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \leq |x_m - y_m| \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}, |x_n - y_n| < \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\},$$

$$A_{\frac{1}{16}} = \left\{ \mathbf{x} \in C^5 : \exists \mathbf{y} \in V \exists i, j, k, l \in \{1, \dots, 5\} (i, j, k, l \text{ mind különböző}) \forall m \in \{i, j, k, l\} \forall n \in \{1, \dots, 5\} \setminus \{i, j, k, l\} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \leq |x_m - y_m| \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}, |x_n - y_n| < \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\}$$

$A_{\frac{1}{32}} = [\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}]^5$. A 41. ábra a $C^{\mathbf{y}}$ kockához tartozó egyik $A_{\frac{1}{4}}$ halmaz összefüggő komponensének egy két dimenziós síkkal alkotott metszetét mutatja.

Jelölje $C_{\mathbf{y}}$, ahol $\mathbf{y} \in \{0, 1\}^5$, a $[0, 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}]^5$ kocka azon eltoltját, amelynek az egyik csúcsa \mathbf{y} és az eltolt C^5 kockában van. Használjuk a következő jelölést:

$\mathcal{H} := \{C_{\mathbf{y}}, \text{ ahol } \mathbf{y} \in \{0, 1\}^5\}$. A \mathcal{H} elemeit kis kockáknak nevezzük.



41. ábra.

Tekintsük a $C_y \in \mathcal{H}$ kis kockához rendelt súlyfüggvényeket

$$f_1^y(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ha } \mathbf{x} \in A_1 \cap C_y, \\ \frac{1}{2} & , \text{ha } \mathbf{x} \in A_{\frac{1}{2}} \cap C_y, \\ \frac{1}{4} & , \text{ha } \mathbf{x} \in A_{\frac{1}{4}} \cap C_y, \\ \frac{1}{8} & , \text{ha } \mathbf{x} \in A_{\frac{1}{8}} \cap C_y, \\ \frac{1}{16} & , \text{ha } \mathbf{x} \in A_{\frac{1}{16}} \cap C_y, \\ \frac{1}{32} & , \text{ha } \mathbf{x} \in A_{\frac{1}{32}} \cap C_y, \\ 0 & , \text{ha } \mathbf{x} \notin C_y \end{cases} \quad \text{és} \quad f_2^y(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ha } \mathbf{x} \in A_1 \cap C_y, \\ \frac{1}{2} & , \text{ha } \mathbf{x} \in A_{\frac{1}{2}} \cap C_y, \\ \frac{31}{64} & , \text{ha } \mathbf{x} \in A_{\frac{31}{64}}^y \cap C_y, \\ \frac{1}{4} & , \text{ha } \mathbf{x} \in A_{\frac{1}{4}} \cap C_y, \\ \frac{11}{64} & , \text{ha } \mathbf{x} \in A_{\frac{11}{64}}^y \cap C_y, \\ \frac{1}{64} & , \text{ha } \mathbf{x} \in A_{\frac{1}{64}}^{*y} \cap C_y, \\ \frac{1}{8} & , \text{ha } \mathbf{x} \in A_{\frac{1}{8}} \cap C_y, \\ \frac{1}{16} & , \text{ha } \mathbf{x} \in A_{\frac{1}{16}} \cap C_y, \\ \frac{1}{32} & , \text{ha } \mathbf{x} \in A_{\frac{1}{32}} \cap C_y, \\ 0 & , \text{ha } \mathbf{x} \notin C_y \end{cases},$$

ahol $\mathbf{x} \in C$.

Ha B egy diszkrét pontrendszer, akkor $f_i^y(B) := \sum_{b \in B} f_i^y(b)$, ha $i = 1, 2$. Legyen $\mathfrak{F} \subset C^5$ olyan diszkrét pontrendszer, amelyre igaz, hogy minden $p, q \in \mathfrak{F}$ ($p \neq q$) esetén

$d(p, q) \geq 1$. Nyilván

$$\text{card } \mathfrak{F} = \sum_{\mathbf{y} \in \{0,1\}^5} f_i^{\mathbf{y}}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}}),$$

ha $i = 1, 2$.

Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ egy konvex d -dimenziós politóp. Legyen K^0 és K^1 rendre a csúcs és élhalmaza a K politópnak. Legyen G_K a K^0 csúcshalmazú és K^1 élhalmazú gráf. Legyen $p \in \mathbb{R}^d$ olyan pont, hogy a K politópnak létezik egyetlen olyan p_0 csúcsa, amely a legközelebb van a p ponthoz, azaz $d(p, p_0) = \min_{v \in K^0} d(p, v)$, azaz p_0 a p ponthoz legközelebb lévő csúcs. Hasonlóan legyen $q \in \mathbb{R}^d$ olyan pont, hogy a K politópnak létezik egyetlen olyan q_0 csúcsa, amely a legközelebb van a q ponthoz, azaz $d(q, q_0) = \min_{v \in K^0} d(q, v)$, azaz q_0 a q ponthoz legközelebb lévő csúcs. $d_1^K(p, q)$ jelentse a G_K gráfban a p_0, q_0 végpontú minimális séta hosszát, ahol p_0, q_0 rendre a K csúcsai közül a p, q ponthoz legközelebbi csúcs.

6.3. A bizonyítás vázlata

A 6.1. Lemmából következi, hogy $\text{card } \mathfrak{F} \leq 32 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 48$.

A 6.1. és a 6.2. Lemmából következik, hogy $\text{card } \mathfrak{F} \leq 16 \left(2 + \frac{3}{4}\right) = 44$.

A 6.1, a 6.2 és a 6.3. Lemmából kapjuk, hogy $\text{card } \mathfrak{F} \leq 16 \left(2 + \frac{43}{64}\right) = 42.75$. Tehát $\text{card } \mathfrak{F} \leq 42$.

6.4. Előkészületek

A bizonyítás során használjuk a következő Lemmákat.

6.1. Lemma. *Ha $C_{\mathbf{x}} \in \mathcal{H}$, akkor $\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{x}}) \leq 2$.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül vizsgálhatjuk csak a $C_{(0,0,0,0,0)}$ kockát.

Az egyszerűség kedvéért használjuk az $\mathbf{y}0 = (0, 0, 0, 0, 0)$ jelölést.

Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $\text{card}(C_{\mathbf{y}0} \cap \mathfrak{F}) \geq 3$. Így a $C_{\mathbf{y}0}$ kockában van egy p_1, p_2, p_3 (valódi) háromszög, amely csúcsai \mathfrak{F} halmazbeli pontok. A p_1, p_2, p_3 háromszög legnagyobb szöge legyen a $p_1 p_2 p_3 \angle$ szög, ami a legnagyobb, ha a $p_1 p_2, p_2 p_3 (\geq$

1) oldalak a lehető legrövidebbek és a $p_1p_3(\leq \sqrt{5}-1)$ a lehető leghosszabb. Így $p_1p_2p_3\angle \leq 2\arcsin(\frac{\sqrt{5}-1}{2}) = 76.34\dots^\circ$. Tehát a $p_1p_2p_3$ háromszög hegyesszögű. A minimális területe az olyan hegyesszögű háromszögeknek, amelyek oldalai legalább 1 hosszúak

$$\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

A 4.1. Lemma miatt a p_1, p_2, p_3 pontokat kicserélhetjük a C_{y_0} kocka csúcspontjaira, miközben a $p_1p_2p_3$ háromszög területe nem csökken. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a C_{y_0} kockában az olyan háromszögek maximális területe, amely háromszögek csúcspontjai a kockának is csúcspontjai,

$$\sqrt{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 = 0.432\dots < \frac{\sqrt{3}}{4} = 0.43301\dots;$$

ellentmondás. Ezzel beláttuk a Lemma állítását. \square

6.2. Lemma. *Legyenek $C_x, C_y \in \mathcal{H}$ ($x \neq y$) olyan kis kockák, amelyre $C_x \cap C_y \cap A_{\frac{1}{2}} \neq \emptyset$ és $C_x \cap C_y \cap A_{\frac{1}{2}} \cap \mathfrak{F} = \emptyset$. Ekkor*

$$f_1^x(\mathfrak{F} \cap C_x) + f_1^y(\mathfrak{F} \cap C_y) \leq 2 + \frac{3}{4}.$$

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül vizsgálhatjuk csak a $C_{(0,0,0,0,0)}$, $C_{(1,0,0,0,0)}$ kockákat és feltesszük, hogy $\left(\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right] \times \left[0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]^4\right) \cap \mathfrak{F} = \emptyset$. Az egyszerűség kedvéért használjuk az $y_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$, $y_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$, $C' = C_{y_0} \cup C_{y_1}$ jelöléseket. Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $f_1^{y_0}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0}) + f_1^{y_1}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1}) > 2 + \frac{3}{4}$. A 6.1. Lemma és $\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0} \cap A_1) \leq 1$, $\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1} \cap A_1) \leq 1$ miatt kapjuk, hogy $f_1^{y_0}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0}) + f_1^{y_1}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1}) = 3$. Az előbbi egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $f_1^{y_0}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0}) = 1.5$ és $f_1^{y_1}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1}) = 1.5$, ami pontosan akkor teljesül, ha $\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0} \cap A_1) = 1$, $\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0} \cap A_{\frac{1}{2}}) = 1$, $\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1} \cap A_1) = 1$, $\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1} \cap A_{\frac{1}{2}}) = 1$. Mivel $\left(\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right] \times \left[0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]^4\right) \cap \mathfrak{F} = \emptyset$ így az $\mathfrak{F} \cap C'$ halmazbeli $\frac{1}{2}$ súlyú pontok a darabszáma pontosan 2.

Az $x_1 = 0, (x_1 = 1)$ síkhoz legközelebbi pontot - ami egyértelműen meghatározott - kicseréljük ezen síkra való merőleges vetületére és $v_0, (v_1)$ szimbólummal jelöljük. Ezen

cserék közben a pontok páronkénti távolsága nem csökken. A $C_{y0}, (C_{y1})$ kockában elhelyezkedő másik pontot jelölje $w_0, (w_1)$.

Legyen $T_0 = [0, \frac{1}{\sqrt{5}}] \times [0, 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}] \times [0, \frac{1}{\sqrt{5}}]^3$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\{v_0, w_0\} \subset T_0$. Legyen T_1 az az 5-dimenziós téglatest, amely a C_{y1} kockában van, tartalmazza az $A_1 \cap C_{y1}$ kockát, élhosszai $\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}$ és amiben a v_1, w_1 pontok fekszenek. Legyen Y_i ($i = 0, 1$) azon 4-dimenziós kockáknak az uniója, amelyek oldalhossza $\frac{1}{\sqrt{5}} - c$, ahol $c = 0.3$ (a továbbiakban $c = 0.3$), a T_i tartalmazza, az $x_1 = i$ hipersíkban fekszenek és a T_i egy csúcspontjával egybeesik az egyik csúcspontjuk. Legyen $Y = Y_0 \cup Y_1$. Ha $v_i \notin Y$ valamely $i = 0, 1$ esetén, akkor w_i és $x_1 = i$ távolsága legalább

$$\min \left(\sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{2}{5} - c^2}, \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}} + c\right)^2 - \frac{3}{5}} \right) \quad (1)$$

$$= 0.452 \dots > \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.447 \dots;$$

ellentmondás. A továbbiakban feltesszük, hogy $\{v_0, v_1\} \subset Y$. Ekkor a $T_0, (T_1)$ 5-dimenziós téglatestnek van egyértelműen olyan csúcspontja, amely a legközelebb van a $v_0, (v_1)$ ponthoz. Legyen ez $s_{00}, (s_{01})$ csúcs.

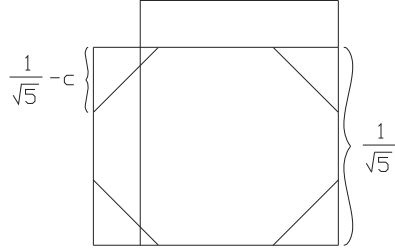
Legyen $S_i = \text{conv}(s_{1i}, s_{2i}, s_{3i}, s_{4i}, s_{5i}, s_{6i})$ az az 5-dimenziós szimplex, amelyre s_{1i} a T_i $d_1^{T_i}(s_{1i}, v_i) = 5$ csúcsa, $d(s_{ji}, s_{1i}) = \frac{1}{\sqrt{5}} - c$ és a s_{ji} pontok a T_i élein helyezkednek el ($j = 2, 3, \dots, 6; i = 0, 1$). Vegyük észre, hogy s_{0i}, s_{1i} átellenes pontok a T_i testben ($i = 1, 2$). Mivel

$$\max \left(\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{3}{5} + c^2}, \sqrt{\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}} + c\right)^2 + \frac{4}{5}} \right) < 0.997 \dots \quad (2)$$

így $w_i \in S_i$ ($i = 0, 1$). Mivel

$$\frac{1}{\sqrt{5}} - c < \frac{1}{2\sqrt{5}} < \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}}{2} < c < 1 - \frac{2}{\sqrt{5}} + c \quad (3)$$

így a T_k testnek van egy s illetve k illetve l csúcsa, amely az s_{ji} illetve w_i illetve v_i ponthoz van a legközelebb a csúcsok közül ($j = 0, 1, \dots, 6; i = 1, 2; k = 1, 2$) (42. ábra). Legyen s_1 az az egyetlen csúcsa a T_1 testnek, amelyre $d_1^{T_1}(s_{10}, s_1) = 0$. A



42. ábra.

(3) miatt használhatjuk a $d_1^{T_1}(w_0, s_1)$, $d_1^{T_1}(v_1, w_0)$, $d_1^{T_1}(v_1, s_1)$ formulákat és a következő egyenlőségeket $d_1^{T_1}(w_0, s_1) = 0$, $d_1^{T_1}(v_1, w_0) = d_1^{T_1}(v_1, s_1)$. Ha $d_1^{T_1}(v_1, w_0) \leq 2$, akkor

$$d(v_1, w_0) \leq \sqrt{(1-c)^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} + 3 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}} - c\right)^2 = 0.993 \dots < 1. \quad (4)$$

Így $d_1^{T_1}(v_1, w_0) \in \{3, 4, 5\}$. Az $S_0 \cup S_1$ átmérője akkor a legnagyobb, ha $d_1^{T_1}(v_1, w_0) = 3$. Ekkor $d_1^{T_1}(w_1, w_0) = 2$, így

$$\text{diam}(S_0 \cup S_1) \leq \sqrt{(1-2c)^2 + 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} + 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}} - c\right)^2 = 0.94 \dots < 1, \quad (5)$$

ellentmondás. Ezzel beláttuk a Lemma állítását. \square

6.1. Következmény. Legyen $C_{\mathbf{x}}, C_{\mathbf{y}} \in \mathcal{H}$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$) olyan kis kockák, amelyre $C_{\mathbf{x}} \cap C_{\mathbf{y}} \cap A_{\frac{1}{2}} \neq \emptyset$ és $C_{\mathbf{x}} \cap C_{\mathbf{y}} \cap A_{\frac{1}{2}} \cap \mathfrak{F} = \emptyset$. Ekkor

$$f_2^{\mathbf{x}}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{x}}) + f_2^{\mathbf{y}}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}}) \leq 2 + \frac{63}{64}.$$

6.3. Lemma. Legyen $C_{\mathbf{x}}, C_{\mathbf{y}} \in \mathcal{H}$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$) olyan kis kockák, amelyre $C_{\mathbf{x}} \cap C_{\mathbf{y}} \cap A_{\frac{1}{2}} \neq \emptyset$ $C_{\mathbf{x}} \cap C_{\mathbf{y}} \cap A_{\frac{1}{2}} \cap \mathfrak{F} = \emptyset$ és $C_{\mathbf{x}} \cap C_{\mathbf{y}} \cap A_{\frac{31}{64}}^{\mathbf{x}} \cap A_{\frac{31}{64}}^{\mathbf{y}} \cap \mathfrak{F} = \emptyset$. Ekkor

$$f_2^{\mathbf{x}}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{x}}) + f_2^{\mathbf{y}}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}}) \leq 2 + \frac{43}{64}.$$

Bizonyítás. A bizonyítás hasonló a 6.2. Lemma bizonyításához.

Az általánosság megszorítása nélkül vizsgálhatjuk csak a $C_{(0,0,0,0,0)}$, $C_{(1,0,0,0,0)}$ kockákat és feltesszük, hogy $C_{y_0} \cap C_{y_1} \cap A_{\frac{1}{2}} \cap \mathfrak{F} = \emptyset$ és $C_{y_0} \cap C_{y_1} \cap A_{\frac{31}{64}}^{y_0} \cap A_{\frac{31}{64}}^{y_1} \cap \mathfrak{F} = \emptyset$. Az egyszerűség kedvéért használjuk a $y_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$, $y_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$ jelöléseket.

Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $f_2^{y_0}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0}) + f_2^{y_1}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1}) > 2 + \frac{43}{64}$. A 6.1. Lemma és a 6.1. Következmény négy esetet különböztetünk meg.

1. *Eset.* $f_2^{y_0}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0}) + f_2^{y_1}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1}) = 2 + \frac{63}{64}$.
2. *Eset.* $f_2^{y_0}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0}) + f_2^{y_1}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1}) = 2 + \frac{31}{32}$.
3. *Eset.* $f_2^{y_0}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0}) + f_2^{y_1}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1}) = 2 + \frac{3}{4}$.
4. *Eset.* $f_2^{y_0}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0}) + f_2^{y_1}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1}) = 2 + \frac{47}{64}$.

Lássuk az esetek bizonyítását!

1. *Eset.* $f_2^{y_0}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0}) + f_2^{y_1}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1}) = 2 + \frac{63}{64}$.

Ekkor

$$\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0} \cap A_1) = 1, \text{card}\left(\mathfrak{F} \cap C_{y_0} \cap A_{\frac{1}{2}}\right) = 1,$$

$$\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1} \cap A_1) = 1, \text{card}\left(\mathfrak{F} \cap C_{y_1} \cap A_{\frac{31}{64}}^{y_1}\right) = 1, \text{ vagy}$$

$$\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0} \cap A_1) = 1, \text{card}\left(\mathfrak{F} \cap C_{y_0} \cap A_{\frac{31}{64}}^{y_0}\right) = 1,$$

$$\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1} \cap A_1) = 1, \text{card}\left(\mathfrak{F} \cap C_{y_1} \cap A_{\frac{1}{2}}\right) = 1.$$

$$\text{Tegyük fel, hogy } \text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0} \cap A_1) = 1, \text{card}\left(\mathfrak{F} \cap C_{y_0} \cap A_{\frac{1}{2}}\right) = 1,$$

$$\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1} \cap A_1) = 1, \text{card}\left(\mathfrak{F} \cap C_{y_1} \cap A_{\frac{31}{64}}^{y_1}\right) = 1 \text{ (a másik eset bizonyítása hasonló).}$$

A v_0, v_1, w_0, w_1 pontokat úgy értelmezzük, mint a 6.2. Lemmában. Vegyük észre, hogy a w_i pont és a $x_1 = i$ sík közötti távolság legfeljebb $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ($i = 0, 1$), mert a C_{y_0}, C_{y_1} kockáknak nincs közös pontja.

Legyen $T_0 = [0, \frac{1}{\sqrt{5}}] \times [0, 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}] \times [0, \frac{1}{\sqrt{5}}]^3$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\{v_0, w_0\} \subset T_0$. Legyen T_1 az az 5-dimenziós téglatest, amely a C_{y_1} kockában van, tartalmazza az $A_1 \cap C_{y_1}$ kockát, élhosszai $\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, és amiben a v_1, w_1 pontok fekszenek. Az Y_0, Y_1 és Y halmazokat ugyanúgy értelmezzük, mint a 6.2. Lemmában tettük. Az (1) egyenlőtlenségből következik, hogy $v_0 \in Y_0$. Ha $v_1 \notin Y_1$, akkor a w_1 pont és az $x_1 = 1$ hipersík közötti távolság legalább ($c = 0.3$ úgy, mint

a 6.2. Lemmában)

$$\min \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - c^2}, \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} + c \right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{2}{5}} \right) = 0.45 \dots > \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad (6)$$

ellentmondás. A következőkben feltesszük, hogy $\{v_0, v_1\} \subset Y$.

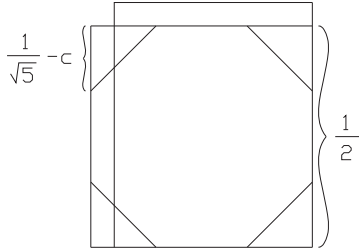
Az S_i ($i = 0, 1$) szimplexet úgy értelmezzük, mint a 6.2. Lemmában tettük. A (2) egyenlőtlenségből következik, hogy $w_0 \in S_0$. Mivel

$$\max \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + c^2}, \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} + c \right)^2 + \frac{3}{5}} \right) < 0.994 \dots, \quad (7)$$

így $w_1 \in S_1$. Mivel

$$\frac{1}{\sqrt{5}} - c < \frac{1}{2} - c < \frac{1}{2\sqrt{5}} < \frac{1}{4} < \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}}{2} < c < 1 - \frac{2}{\sqrt{5}} + c, \quad (8)$$

így használhatjuk a $d_1^{T_1}(s_{10}, s_1) = 0$ formulát, ahol s_1 a T_1 egyértelmű csúcspontja (43. ábra). A (8) egyenlőtlenségekből következik, hogy $d_1^{T_1}(w_0, s_1) = 0$ és $d_1^{T_1}(v_1, w_0) = d_1^{T_1}(v_1, s_1)$ (hasonlóan, mint a 6.2. Lemmában használhatjuk a formulákat).



43. ábra.

Ha $d_1^{T_1}(v_1, w_0) \leq 2$, akkor a (4) egyenlőtlenségből következik azellentmondás. Így $d_1^{T_1}(v_1, w_0) \in \{3, 4, 5\}$. Az $S_0 \cup S_1$ halmaz átmérője akkor a legnagyobb, ha $d_1^{T_1}(v_1, w_0) = 3$. Ekkor $d_1^{T_1}(w_1, w_0) = 2$. Mivel $1 - c - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} + c \right) < 1 - 2c$, így (5) egyenlőtlenségből következik azellentmondás. Ezzel beláttuk az 1. Esetet.

2. *Eset.* $f_2^{y_0}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0}) + f_2^{y_1}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1}) = 2 + \frac{31}{32}$.

Ekkor

$$\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0} \cap A_1) = 1, \text{card}\left(\mathfrak{F} \cap C_{y_0} \cap A_{\frac{31}{64}}^{y_0}\right) = 1,$$

$$\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1} \cap A_1) = 1, \text{card}\left(\mathfrak{F} \cap C_{y_1} \cap A_{\frac{31}{64}}^{y_1}\right) = 1.$$

Nyilván az $\mathfrak{F} \cap C_{y_0} \cap A_{\frac{31}{64}}^{y_0}, \mathfrak{F} \cap C_{y_1} \cap A_{\frac{31}{64}}^{y_1}$ pontok különbözőek (a Lemma feltételei miatt).

A v_0, v_1, w_0, w_1 pontokat úgy értelmezzük, mint a 6.2. Lemmában. Vegyük észre, hogy a w_i pont és az $x_1 = i$ hipersík közötti távolság legfeljebb $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ($i = 1, 2$), mert a C_{y_0}, C_{y_1} kockáknak nincs \mathfrak{F} halmazbeli közös pontjuk.

Legyen $T_0 = [0, \frac{1}{\sqrt{5}}] \times [0, \frac{1}{2}]^2 \times [0, \frac{1}{\sqrt{5}}]^2$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\{v_0, w_0\} \subset T_0$. Legyen T_1 az az 5-dimenziós téglatest, amely a C_{y_1} kockában van, tartalmazza az $A_1 \cap C_{y_1}$ kockát, élhosszai $\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, és amiben a v_1, w_1 pontok fekszenek. Az Y_0, Y_1 és Y halmazokat ugyanúgy értelmezzük, mint a 6.2. Lemmában tettük. A (6) egyenlőtlenségből következik, hogy $\{v_0, v_1\} \subset Y$ (úgy, mint az 1. Esetben).

Az S_i, s_1 ($i = 0, 1$) szimplexet és pontot úgy értelmezzük, mint a 6.2. Lemmában tettük. A (8) egyenlőtlenségből következik, hogy $d_1^{T_1}(w_0, s_1) = 0$ és $d_1^{T_1}(v_1, w_0) = d_1^{T_1}(v_1, s_1)$ (hasonlóan, mint a 6.2. Lemmában használhatjuk a formulákat).

Ha $d_1^{T_1}(v_1, w_0) \leq 2$, akkor a (4) egyenlőtlenségből következik az ellentmondás. Így $d_1^{T_1}(v_1, w_0) \in \{3, 4, 5\}$. Az $S_0 \cup S_1$ halmaz átmérője akkor a legkisebb, ha $d_1^{T_1}(v_1, w_0) = 3$. Ekkor $d_1^{T_1}(w_1, w_0) = 2$. Mivel $1 - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} + c\right) < 1 - 2c$, így az (5) egyenlőtlenségből következik az ellentmondás. Ezzel beláttuk a 2. Esetet.

3. *Eset.* $f_2^{y_0}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0}) + f_2^{y_1}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1}) = 2 + \frac{3}{4}$.

Ekkor

$$\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0} \cap A_1) = 1, \text{card}\left(\mathfrak{F} \cap C_{y_0} \cap A_{\frac{1}{2}}\right) = 1,$$

$$\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1} \cap A_1) = 1, \text{card}\left(\mathfrak{F} \cap C_{y_1} \cap A_{\frac{1}{4}}^*\right) = 1, \text{ vagy}$$

$$\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{y_0} \cap A_1) = 1, \text{card}\left(\mathfrak{F} \cap C_{y_0} \cap A_{\frac{1}{4}}^*\right) = 1,$$

$$\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{y_1} \cap A_1) = 1, \text{card}\left(\mathfrak{F} \cap C_{y_1} \cap A_{\frac{1}{2}}\right) = 1.$$

Az 1. Eset bizonyításából kapjuk, hogy a 3. Eset igaz.

4. Eset. $f_2^{\mathbf{y}0}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}0}) + f_2^{\mathbf{y}1}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}1}) = 2 + \frac{47}{64}$.

Ekkor

$$\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}0} \cap A_1) = 1, \text{card}\left(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}0} \cap A_{\frac{31}{64}}^{\mathbf{y}0}\right) = 1,$$

$$\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}1} \cap A_1) = 1, \text{card}\left(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}1} \cap A_{\frac{1}{4}}^*\right) = 1 \text{ vagy}$$

$$\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}0} \cap A_1) = 1, \text{card}\left(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}0} \cap A_{\frac{1}{4}}^*\right) = 1,$$

$$\text{card}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}1} \cap A_1) = 1, \text{card}\left(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}1} \cap A_{\frac{31}{64}}^{\mathbf{y}1}\right) = 1.$$

A 2. Eset bizonyításából kapjuk, hogy a 4. Eset igaz.

Ezzel beláttuk a Lemma állítását. \square

6.5. A Tétel bizonyítása

Emlékeztetőül, amit bizonyítunk.

7. Tétel. *Az 5-dimenziós egységkockában az olyan pontok maximális száma legfeljebb 42, amely pontok páronkénti távolsága legalább 1, azaz $k(5) \leq 42$.*

Bizonyítás. Azt fogjuk megmutatni, hogy 4 szomszédos kis kockában az \mathfrak{F} halmazbeli súlyok összege nem lehet nagyobb, mint $5 + \frac{11}{32}$ (az $f_2^{\mathbf{y}}$ függvény szerint). Ebből következik, hogy az \mathfrak{F} elemeinek a száma nem lehet több, mint $42 < 42.75 = 8 \left(5 + \frac{11}{32}\right)$. Az egyszerűség kedvéért használjuk a következő jelöléseket $\mathbf{y}00 = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{y}10 = (1, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{y}01 = (0, 1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{y}11 = (1, 1, 0, 0, 0)$, $C'' = C_{\mathbf{y}00} \cup C_{\mathbf{y}10} \cup C_{\mathbf{y}01} \cup C_{\mathbf{y}11}$. Az általánosság megszorítása nélkül vizsgálhatjuk csak a C'' halmazt. Két esetet különböztetünk meg:

1. Eset. $\mathfrak{F} \cap C'' \cap A_{\frac{1}{2}} \neq \emptyset$.

2. Eset. $\mathfrak{F} \cap C'' \cap A_{\frac{1}{2}} = \emptyset$.

Lássuk az esetek bizonyítását!

1. Eset. $\mathfrak{F} \cap H'' \cap A_{\frac{1}{2}} \neq \emptyset$.

Két esetet különböztetünk meg:

1.1. Eset. A négy kis kocka között van kettő, amelyeknek van közös $\frac{1}{2}$ súlyú \mathfrak{F} halmazbeli pontja.

1.2. Eset. A négy kis kocka között nincs kettő, amelyeknek van közös $\frac{1}{2}$ súlyú \mathfrak{F} hal-

mazbeli pontja.

Lássuk az esetek bizonyítását!

1.1. Eset. A négy kis kocka között van kettő, amelyeknek van közös $\frac{1}{2}$ súlyú \mathfrak{F} halmazbeli pontja.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a $C_{\mathbf{y}00}$ és a $C_{\mathbf{y}01}$ kockáknak van közös $\frac{1}{2}$ súlyú pontja. A 6.1. Lemma miatt

$$f_2^{\mathbf{y}00}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}00}) \leq 1 + \frac{1}{2}, \quad f_2^{\mathbf{y}01}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}01}) \leq 1 + \frac{1}{2}.$$

A 6.3. Lemma miatt

$$f_2^{\mathbf{y}10}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}10}) \leq 1 + \frac{11}{64}, \quad f_2^{\mathbf{y}11}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}11}) \leq 1 + \frac{11}{64}.$$

Így

$$\begin{aligned} f_2^{\mathbf{y}00}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}00}) + f_2^{\mathbf{y}10}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}10}) + f_2^{\mathbf{y}01}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}01}) + f_2^{\mathbf{y}11}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}11}) \leq \\ 2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + 2 \left(1 + \frac{11}{64}\right) = 5 + \frac{11}{32}. \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk az 1.1. Eset állítását.

1.2. Eset. A négy kis kocka között nincs kettő, amelyeknek van közös $\frac{1}{2}$ súlyú \mathfrak{F} halmazbeli pontja.

Feltehetjük, hogy a $C_{\mathbf{y}00}$ kockában van \mathfrak{F} halmazbeli $\frac{1}{2}$ súlyú pont. A 6.1. Lemma miatt

$$f_2^{\mathbf{y}00}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}00}) \leq 1 + \frac{1}{2}, \quad f_2^{\mathbf{y}11}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}11}) \leq 1 + \frac{1}{2}.$$

A 6.3. Lemma miatt

$$f_2^{\mathbf{y}10}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}10}) \leq 1 + \frac{11}{64}, \quad f_2^{\mathbf{y}01}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}01}) \leq 1 + \frac{11}{64}.$$

Így

$$\begin{aligned} f_2^{\mathbf{y}00}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}00}) + f_2^{\mathbf{y}10}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}10}) + f_2^{\mathbf{y}01}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}01}) + f_2^{\mathbf{y}11}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}11}) \leq \\ 2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + 2 \left(1 + \frac{11}{64}\right) = 5 + \frac{11}{32}. \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk az 1.2. Eset és az 1. Eset állítását.

2. Eset. $C'' \cap A_{\frac{1}{2}} \cap \mathfrak{F} = \emptyset$.

Ha nincs az $\mathfrak{F} \cap C''$ halmazban $\frac{31}{64}$ súlyú pont, akkor kész a bizonyítás $((1 + \frac{1}{4}) 32 = 40)$. Így feltesszük, hogy az $\mathfrak{F} \cap C''$ halmazban van $\frac{31}{64}$ súlyú pont. Két esetet különböztetünk meg:

2.1. Eset. A négy kis kocka között van kettő, amelyeknek van közös $\frac{31}{64}$ súlyú \mathfrak{F} halmazbeli pontja.

2.2. Eset. A négy kis kocka között nincs kettő, amelyeknek van közös $\frac{31}{64}$ súlyú \mathfrak{F} halmazbeli pontja.

Lássuk az esetek bizonyítását!

2.1. Eset. A négy kis kocka között van kettő, amelyeknek van közös $\frac{31}{64}$ súlyú \mathfrak{F} halmazbeli pontja.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a $C_{\mathbf{y}00}$ és a $C_{\mathbf{y}01}$ kockáknak van közös $\mathfrak{F} \cap A_{\frac{31}{64}}^{\mathbf{y}0} \cap A_{\frac{31}{64}}^{\mathbf{y}1}$ halmazbeli pontja.

A 6.1. Lemma miatt

$$f_2^{\mathbf{y}00}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}00}) \leq 1 + \frac{31}{64}, \quad f_2^{\mathbf{y}01}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}01}) \leq 1 + \frac{31}{64}.$$

A 6.3. Lemma miatt

$$f_2^{\mathbf{y}10}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}10}) \leq 1 + \frac{11}{64}, \quad f_2^{\mathbf{y}11}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}11}) \leq 1 + \frac{11}{64}.$$

Így

$$\begin{aligned} f_2^{\mathbf{y}00}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}00}) + f_2^{\mathbf{y}10}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}10}) + f_2^{\mathbf{y}01}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}01}) + f_2^{\mathbf{y}11}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}11}) &\leq \\ 2 \left(1 + \frac{31}{64} \right) + 2 \left(1 + \frac{11}{64} \right) &= 5 + \frac{5}{16} < 5 + \frac{11}{32}. \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk a 2.1. Eset állítását.

2.2. Eset. A négy kis kocka között nincs kettő, amelyeknek van közös $\frac{31}{64}$ súlyú \mathfrak{F} halmazbeli pontja.

Feltehetjük, hogy a $C_{\mathbf{y}00}$ kockában van \mathfrak{F} halmazbeli $\frac{31}{64}$ súlyú pont.

A 6.1. Lemma és a feltételek miatt

$$f_2^{\mathbf{y}00}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}00}) \leq 1 + \frac{31}{64} \quad f_2^{\mathbf{y}11}(\mathfrak{F} \cap C_{\mathbf{y}00}) \leq 1 + \frac{31}{64}.$$

A 6.3. Lemma miatt

$$f_2^{y_{10}}(\mathfrak{F} \cap C_{y_{10}}) \leq 1 + \frac{11}{64}, \quad f_2^{y_{01}}(\mathfrak{F} \cap C_{y_{01}}) \leq 1 + \frac{11}{64}.$$

Így

$$\begin{aligned} f_2^{y_{00}}(\mathfrak{F} \cap C_{y_{00}}) + f_2^{y_{10}}(\mathfrak{F} \cap C_{y_{10}}) + f_2^{y_{01}}(\mathfrak{F} \cap C_{y_{01}}) + f_2^{y_{11}}(\mathfrak{F} \cap C_{y_{11}}) \leq \\ 2 \left(1 + \frac{31}{64} \right) + 2 \left(1 + \frac{11}{64} \right) = 5 + \frac{5}{16} < 5 + \frac{11}{32}. \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk a 2.2. Eset állítását és a Tétel állítását. \square

7. Irodalom

Hivatkozások

- [1] V. Bálint and V. Bálint Jr.: On the number of points at distance at least 1 in the unit cube, *Geombinatorics* **12** (2003) 157-166.
- [2] D.W. Boll, J. Donovan, R.L. Graham, B.D. Lubachevsky: Improving dense packing of equal disk in a square, *The Electronic Journal of Combinatorics* **7** (2000) #R46.
- [3] K. Böröczky and Z. Lángi: On the relative distances of six points in a plane convex body, *Stud. Sci. Math. Hungar.* **42** (2005) 253-264.
- [4] K. Böröczky, Jr.: *Finite packing and covering*, Cambridge Univ. Press, 2004.
- [5] K. Böröczky, Jr., I. Fábián and G. Wintsche: Covering the crosspolytope by equal balls, *Period. Math. Hungar.* **53** (2006) 103-113.
- [6] P. Brass, W. Moser and J. Pach: *Research problems in discrete geometry*, Springer Verlag, New York (2005).
- [7] L.G. Casado, I. García, P.G. Szabó, T. Csentes: Packing Equal Circles in a Square I. - Problem Setting and Bounds for Optimal Solutions, *Optimization Theory: Recent Developments from Mátraháza* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2001) pp. 191-206.
- [8] L.G. Casado, I. García, P.G. Szabó, T. Csentes: Packing equal circles in a square II. - New results for up to 100 circles using the TAMSASS-PECS algorithm *Optimization Theory: Recent Developments from Mátraháza* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2001) pp. 207-224.
- [9] S.A. Chepanov, S.S. Ryvskov, N.N. Yakovlev: On the disjointness of point systems (in Russian), *Trudy Mat. Inst. Steklov* **196** (1991) 147-155.
- [10] K. Doliwka and M. Lassak: On relatively short and long sides of convex pentagons, *Geom. Dedicata* **56** (1995) 221-224.

- [11] P. G. Doyle, J. C. Lagarias and D. Randall: Self-packing of centrally symmetric convex bodies in R^2 , *Discrete Comput. Geom.* **8** (1992) 171-189.
- [12] G. Fejes Tóth: Packing and covering, in: *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, ed. by J. E. Goodman and J. O'Rourke, CRC Press, Boca Raton, New York (1997) 19-41.
- [13] G. Fejes Tóth and W. Kuperberg: Packing and covering with convex sets, in: *Handbook of Convex Geometry*, ed. by P. M. Gruber and J. M. Wills, North-Holland, Amsterdam (1993) 799-860.
- [14] Th. Gensane: Dense packing of equal spheres in a cube, *The Electronic Journal of Combinatorics* **11** (2004), #R33.
- [15] S. Golab: Some metric problems of the geometry of Minkowski, *Trav. Acad. Mines Cracovie* **6** (1932) 1-79.
- [16] M. Goldberg: On the densest packing of equal spheres in a cube, *Math. Mag.* **44** (1971) 199-208.
- [17] M. Goldberg: The packing of equal circles in a square, *Math. Mag.* **43** (1970) 24-30.
- [18] M. Grannell: An even better packing of ten equal circles in a square, *Manuscript* (1990).
- [19] H. Groemer: Abschätzungen für die Anzahl der konvexen Körper, die einen konvexen Körper berühren, *Monatsh. Math.*, **65** (1961) 74-81.
- [20] C. de Groot, R. Peikert, D. Würtz: The optimal packing of ten equal circles in a square, *IPS Research Report, ETH Zürich No. 90-12* (August 1990).
- [21] B. Grünbaum: On a conjecture of Hadwiger, *Pacific. J. Math.* **11** (1961) 215-219.
- [22] B. Grünbaum: An improved packing of ten circles in a square, *Manuscript* (1990).
- [23] R.K. Guy: Problems, *The geometry of linear metric spaces* (1975) 233-244. *Lecture Notes in Math.* **490** Springer Berlin MR 53 # 6419.

- [24] H. Hadwiger: Über Treffanzahlen der translationsgleichen Eichkörpern, *Arch. Math.* **8** (1957) 212-213.
- [25] A. Heppes, J.B.M. Melissen: Covering a rectangle with equal circles, *Period. Math. Hungar* **34** (1997) 65-81.
- [26] A. Joós and Zs. Lángi: On the Relative Distances of Seven Points in a Plane Convex Body, *J. Geom.* (to appear).
- [27] A. Joós: On a convex body with odd Hadwiger number, *Acta. Math. Hungar.* (to appear).
- [28] A. Joós: On the packing of fourteen congruent spheres in a cube, *Geom. Dedicata* (submitted).
- [29] A. Joós: Covering the unit cube by equal balls, *Beiträge Algebra Geom.* (submitted).
- [30] A. Joós: On the number of points at distance at least 1 in the 5-dimensional unit cube, *Canad. Math. Bull.* (submitted).
- [31] G. Kuperberg and W. Kuperberg: Ball packings and coverings with respect to the unit cube, (*in preparation*).
- [32] K. Kirchner, G. Wengerodt: Die dichteste Packung von 36 Kreisen in einem Quadrat, *Beiträge zur Algebra und Geom.* **25** (1987) 147-159.
- [33] B.D. Lubachevsky, R.L. Graham, F.H. Stillinger: Patterns and structures in disk packings, *Period. Math. Hungar.* **34** (1997) 123-142.
- [34] M.Cs. Markót: Optimal packing of 28 equal circles in a unit square - the first reliable solution, *Numerical Algorithms* **37** (2004) 253-261.
- [35] C.D. Maranas, Ch.A. Floudas, P.M. Pardalos: New results in the packing of equal circles in a square, *Discrete Math.* **142** (1995) 287-293.
- [36] R. Milano: *Configurations optimales de desques dans un polygone régulier*, Mémoire de Licence, Université Libre de Bruxelles (1978).

- [37] M. Mollard, C. Payan: Some progress in the packing of equal circles in a square, *Discrete Math.* **84** (1990) 303-307.
- [38] L. Moser: *Poorly formulated unsolved problems of combinatorial geometry*, Mimeographed (1966).
- [39] W. Moser and J. Pach: *Research problems in discrete geometry*, Privately published collection of problems (1994).
- [40] W.O.L. Moser: Problems, problems, problems, *Discrete Appl. Math.* **31** (1991) 201-225.
- [41] K.J. Nurmela: Circle covering in the plane, *Proceedings of the Seventh Nordic Combinatorial Conference (Turku 1999)*, *TUCS Gen. Publ.* **15**, Turku Cent. Comput. Sci. Truku (1999) 71-78.
- [42] K.J. Nurmela, P.R.J. Östergård: Optimal packings of equal circles in a square, in: *Combinatorics, Graph Theory, and Algorithms*, Y. Alavi, D.R. Lick, A. Schwenk eds., (Proceedings of Eight Quadrennial International Conference on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms, and Applications) (1999) 671-680.
- [43] K.J. Nurmela, P.R.J. Östergård: Packing up to 50 equal circles in a square, *Discrete Comput. Geom.* **18** (1997) 111-120.
- [44] K.J. Nurmela, P.R.J. Östergård: More optimal packing of equal circles in a square, *Discrete Comput. Geom.* **22** (1999) 439-457.
- [45] R. Peikert, D. Würtz, M. Monagan, C. de Groot: Packing circles in a square: A review and new results, in *System modelling and Optimization* (1991), P. Kall, ed., Springer *Lecture Notes Control Inf. Sci.* **180** (1992) 45-54.
- [46] C.A. Rogers: Covering a sphere with spheres, *Mathematika* **10** (1963) 157-164.
- [47] J. Schaer: On the densest packing of spheres in a cube, *Canad. Math. Bull.* **9** (1966) 265-270.

- [48] J. Schaer: On the densest packing of five spheres in a cube, *Canad. Math. Bull.* **9** (1966) 271-274.
- [49] J. Schaer: On the densest packing of six spheres in a cube, *Canad. Math. Bull.* **9** (1966) 275-280.
- [50] J. Schaer: On the densest packing of ten congruent spheres in a cube, in: *Intuitive Geometry* (Szeged, 1991), K. Böröczky et al., eds., Colloq. Math. Soc. János Bolyai **63** North-Holland (1994) 403-424.
- [51] J. Schaer: On the densest packing of nine circles in a square, *Canad. Math. Bull.* **8** (1965) 273-277.
- [52] J. Schaer: On the densest packing of ten equal circles in a square, *Math. Mag.* **44** (1971) 139-140.
- [53] J. Schaer, A. Meir: On a geometric extremum problem, *Canad. Math. Bull.* **8** (1965) 21-27.
- [54] K. Schlüter: Kreispackung in Quadraten, *Elemente der Math.* **34** (1979) 12-14.
- [55] B.L. Schwartz: Separating points in a square, *J. Recreational Math.* **3** (1970) 195-204.
- [56] H.P.F. Swinnerton-Dyer: Extremal lattices of convex bodies, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **49** (1953) 161-162.
- [57] I. Talata: Exponential lower bound for the translative kissing number of d -dimensional convex bodies, *Discrete Comput. Geom.* **19** (1998) 447-455.
- [58] I. Talata: The translative kissing number of tetrahedra is eighteen, *Discrete Comput. Geom.* **22** (1999) 231-248.
- [59] I. Talata: On a lemma of Minkowski, *Period. Math. Hungar.* **36** (1998) 199-207.
- [60] I. Talata: On extensive subset of convex bodies, *Period. Math. Hungar.* **38** (1999) 231-246.

- [61] I. Talata: On an example for a convex body whose transitive kissing number is odd, *Private communication*
- [62] T. Tarnai, Z. Gáspár: Covering a square by equal circles, *Elemente Math.* **50** (1995) 167-170.
- [63] J-L. Verger-Gaugray: Covering a ball with smaller equal balls in R^n , *Disc. Comp. Geom.* **33** (2005) 143-155.
- [64] G. Valette: A better packing of ten circles in a square, *Discrete Math.* **76** (1989) 57-59.
- [65] G. Wengerodt: Die dichteste Packung von 16 Kreisen in einem Quadrat, *Beiträge zur Algebra und Geom.* **16** (1983) 173-190.
- [66] G. Wengerodt: Die dichteste Packung von 14 Kreisen in einem Quadrat, *Beiträge zur Algebra und Geom.* **25** (1987) 25-46.
- [67] G. Wengerodt: Die dichteste Packung von 25 Kreisen in einem Quadrat, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.* **30** (1987) 3-15.
- [68] C. Zong: The kissing numbers of convex bodies - A brief survey, *Bull. London Math. Soc.* **30** (1998) 1-10.

Összefoglalás

Olyan diszkrét pontrendszereket vizsgálók, amely pontrendszerek egy adott konvex tartományon belül helyezkednek el, és a pontok páronkénti távolsága legalább egy adott érték. Ez a probléma átfogalmazható egy adott konvex tartományban elhelyezkedő egybevágó, nem egymásbanyúló gömbök sugarának a maximalizálására, ha a gömbök darabszáma rögzített. Ennek a duálisa, miszerint egy adott konvex tartományt a lehető legkisebb, egybevágó gömbökkel fedünk le, ha a gömbök darabszáma rögzített. Ezen eredmények sorát bővíttem ebben a dolgozatban.

A dolgozat második fejezetében a síkon egy tetszőleges C konvex alakzatban helyezek el hét darab pontot, amelyek C -távolságát vizsgálom. A fejezetben közölt eredmény Lángi Zsolttal közös.

A harmadik fejezetben a 3-dimenziós euklideszi térben megadok egy olyan centrál-szimmetrikus, konvex testet, amelynek a Harwiger-száma 15, azaz az olyan eltolt-jainak a maximális száma 15, amelyek érintik az eredeti testet és az eltoltak nem nyúlnak egymásba. Ezt az eredményt átfogalmazzuk pontok egy normált térben való pakolására.

A negyedik fejezetben a 3-dimenziós euklideszi térben megmutatom, hogy a legkisebb kocka éle $\sqrt{2}$, amelyben elfér 14 olyan pont, amelyek páronkénti távolsága legalább 1.

Az ötödik fejezetben a 4-dimenziós euklideszi térben megmutatom, hogy a 4-dimenziós egységkocka 8 darab 4-dimenziós, egybevágó gömbbel való lefedése esetén a gömbök minimális sugara $\sqrt{\frac{5}{12}}$.

A hatodik fejezetben az 5-dimenziós euklideszi térben az 5-dimenziós egységkockában elhelyezhető olyan pontok darabszámára adok egy felső becslést, amely pontok távolsága legalább 1. Ez a felső becslés 42.

Summary

I examine such discreet point systems, which of points lie in a convex body and the mutual distances among them are at least a given distance. We can reformulate the problem. We search for the maximum radius of n congruent balls, which lie in a given convex body and the balls are nonoverlapping. We examine the dual problem, too, that is we search for the minimum radius of n congruent balls, which cover a given convex body.

In the second chapter I examine the C -distance of seven points in a plain convex body C . It is a common acquisition with Zsolt Lángi.

In the third chapter I give a convex body in the 3-dimensional Euclidean space, which of Hadwiger-number is 15.

In the fourth chapter I give the smallest cube in the 3-dimensional Euclidean space, in which one can arrange 14 points so that all mutual distances are at least 1.

In the fifth chapter I give the smallest ball, which of 8 congruent copies cover the unit cube in the 4-dimensional Euclidean space.

In the sixth chapter I give an upper bound of the maximum number of points in the 5-dimensional unit cube so that all mutual distances are at least 1.